

SÉRIE A, N° 274.
N° D'ORDRE
908.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. H. BOUASSE.

Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1^{re} THÈSE. — SUR LA TORSION DES FILS FINS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 janvier 1897, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*

POINCARÉ, }
JOLY, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

SÉRIE A, N° 271.

N° D'ORDRE

908.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR

M. H. BOUASSE.

Maitre de Conférences à la Faculté des Sciences de Toulouse.

1^{re} THÈSE. — SUR LA TORSION DES FILS FINS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 8 janvier 1897, devant la Commission d'Examen.

MM. BOUTY, *Président.*

POINCARÉ, }
JOLY, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1896

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
Doyen.....	DARBOUX, Professeur....	Géométrie supér.
	DE LACAZE-DUTHIERS..	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationn.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Calcul des probabi- lités, Physique ma- thématique.
Professeurs.....	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathé- matique et Méca- nique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Astronomie phys.
	N.....	Mécanique phys. et expérimentale.
	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physiol. comparée.
	JOLY.....	Chimie.
Professeurs adjoints.....	PELLAT.....	Physique.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	PAINLEVÉ.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
Secrétaire.....	FOUSSEREAU.	

A

MONSIEUR BRILLOUIN,

Homage de profonde reconnaissance.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LA TORSION DES FILS FINS.

Le Mémoire qu'on va lire est un commentaire des opinions de Coulomb ; il s'exprime ainsi dans son mémorable travail sur la torsion des fils fins :

Quatrième remarque. — Voici comment on peut expliquer l'élasticité et la cohérence des métaux :

Les parties intégrantes du métal ont une élasticité qu'on peut regarder comme parfaite, c'est-à-dire que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater ces parties intégrantes sont proportionnelles aux dilatations ou compressions qu'elles éprouvent ; mais elles sont liées entre elles par la cohérence, quantité constante et absolument différente de l'élasticité. Dans les premiers degrés de torsion, les parties intégrantes changent de figure, s'allongent ou se compriment, sans que les points par où elles adhèrent entre elles, changent de place, parce que la force nécessaire pour produire ces premiers degrés de torsion est moins considérable que la force d'adhérence ; mais lorsque l'angle de torsion devient tel que la force avec laquelle ces parties sont comprimées ou dilatées, est égale à la cohérence qui unit ces parties intégrantes, pour lors, elles doivent se séparer ou glisser l'une sur l'autre. Ce glissement des parties a lieu dans tous les corps ductiles ; mais si, par ce glissement des parties les unes sur les autres, le corps se comprime, l'étendue des points de contact augmente et l'étendue du champ d'élasticité devient plus grande. Ce qui prouve qu'il faut distinguer la cause de l'élasticité, de l'adhérence, c'est qu'on peut faire varier la cohérence à volonté, par le degré de recuit, sans altérer pour cela l'élasticité.

Généraliser et rectifier ces vues, tel a été notre but.

B.

I

DESCRIPTION DES MÉTHODES EXPÉRIMENTALES (1).

On s'est proposé l'étude de la torsion des fils fins.

Le fil employé est en platine et de 150^u de diamètre. On l'utilise, ou bien tel qu'il est sur la bobine, ou bien recuit par un courant d'une intensité connue passant pendant un temps connu, sous tension nulle. Il est difficile de déterminer une relation entre l'intensité du courant et la température du fil. Si la résistance ne variait pas, si le refroidissement était proportionnel à la température, si la chaleur spécifique restait constante, la température serait sensiblement comme le carré de l'intensité. Mais la résistance et la chaleur spécifique croissent avec la température, le refroidissement ne lui est pas proportionnel; la formule empirique qui relie la température et l'intensité est très compliquée : la température n'est peut-être pas la même ni tout le long du fil, ni sur toute une section droite. Le fil se coupe pour trois ampères; sa température ne doit pas dépasser 1100° à 1200°. D'après la variation de résistance, avec 1^{amp},50, la température est voisine de 350°; avec 1^{amp},80, le fil est rouge sombre et à peu près à 500°; il est rouge vif avec 2^{amp},10 et blanc avec 3 ampères.

Pour ces raisons, on énonce le recuit du fil par l'intensité du courant en ampères et sa durée en secondes.

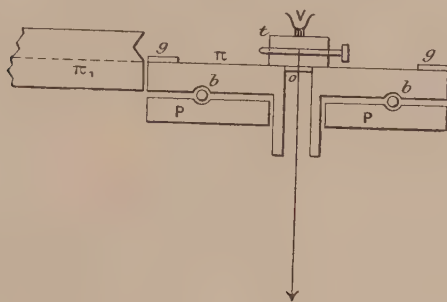
Le fil est toujours fixé de la même manière à ses extrémités.

A l'extrémité supérieure, il s'enroule sur un petit treuil et passe aussitôt dans un petit trou, qui fixe sa position. A l'extrémité inférieure (*fig. 3*), il passe dans un petit

(1) Les appareils ont été construits avec tout le soin et toute l'habileté possibles, par M. Pellin. Les expériences ont porté sur plus de 250 fils et ont duré trois ans. Qu'il me soit permis d'exprimer ici, à M. Brillouin, toute ma gratitude, pour les conseils qu'il a bien voulu me donner, et dont j'ai tiré le plus grand profit.

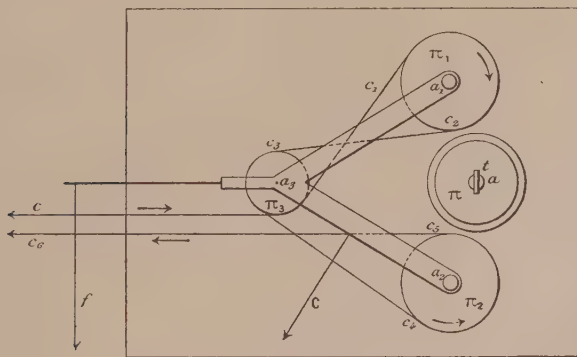
canal pq , creusé dans la pièce qu'il doit supporter ; il s'enroule ensuite sur cette pièce, contre laquelle il est collé à chaud, à la cire Golaz.

Fig. 1.



Le treuil est porté par la poulie π de laiton qui se prolonge par un axe creux. Cet axe s'engage à frottement doux dans une pièce de cuivre PP. Une gorge bb est creusée à moitié dans les deux pièces. Les billes d'acier qu'elle con-

Fig. 2.

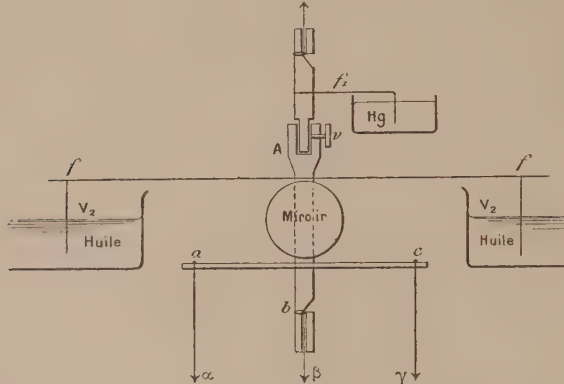


tient transforment le frottement de glissement en un frottement de roulement. La poulie π porte une graduation en degrés ($g g$); on déterminait les rotations à $0^{\circ}, 1$ (*fig. 1*).

L'appareil (fig. 2) permet de donner à la poulie π des

mouvements de rotation dans un sens ou dans l'autre, le tout à distance et à $0^{\circ}, 1$ près. Un cordon $c_1 c_2 \dots$, est mû toujours dans le même sens par un robuste tourne-broche à poids avec l'intermédiaire de deux systèmes de poulies ; il passe sur un tenseur, a un mouvement parfaitement uniforme, qu'on détermine aisément. Il entraîne les pou-

Fig. 3.



lies π_1, π_2, π_3 et communique aux deux premières des mouvements de sens contraire ; l'une d'elles doit entraîner à volonté la poulie π . Dans ce but, π_1 et π_2 sont montées sur une pièce en forme de Y, $a_1 a_2 a_3$, qui tourne autour du point a_3 comme axe. Elle est terminée par une tige r , constamment tirée par un caoutchouc c , et sur laquelle on peut agir à l'aide d'un cordon f . La poulie π est entraînée par adhérence par la partie cylindrique de l'une des poulies π_1, π_2 . On conçoit le jeu de l'appareil sans qu'il soit utile d'insister.

On peut faire une mesure au dynamomètre pour une position donnée de la poulie π , grâce à la disposition suivante. La poulie π porte par-dessous un disque de carton, percé de huit trous d'aiguille dans des azimuts distants de 45° ; ces trous, éclairés par une lampe et un miroir, passent sur une fente de $0^{\text{mm}}, 3$ d'épaisseur ; on les voit

dans la lunette du dynamomètre, et immédiatement sous l'échelle du dynamomètre (grâce à des lentilles et des miroirs additionnels), pendant un temps qui correspond au passage de $\frac{1}{4}$ de degré environ. C'est au moment de leur apparition que se font les lectures.

MESURE DES COUPLES DE TORSION.

L'extrémité inférieure du fil supporte le dynamomètre bifilaire.

C'est une pièce cylindrique de cuivre Ab , dans laquelle entre à frottement doux la pièce à laquelle est fixé le fil ; une vis v lie invariablement les deux pièces. Le cylindre porte un miroir de 4^{cc} parfaitement plan ; il porte aussi deux fils égaux f en platine, qui plongent de quelques millimètres dans des vases pleins d'huile, et un fil f_1 qu'on peut faire plonger dans une coupelle pleine de mercure, lorsqu'on veut recuire le fil. Il est fixé à la pièce ac percée de deux trous a et c de 0^{mm}, 2 de diamètre et à 0^m, 04 l'un de l'autre, dans lesquels passent les fils du bifilaire. Enfin, un fil de platine $b\beta$, de 100^u de diamètre et de 1^m de longueur, permet de faire varier la tension du fil : il s'attache à l'un des plateaux d'une petite balance de Roberval.

Cinquante centimètres au-dessous de cette pièce, se trouve la seconde partie du dynamomètre : une lame, identique à ac et à laquelle viennent aboutir les fils ax et $c\gamma$ sur de petits treuils, est fixée en croix à l'extrémité d'un fléau de balance de 0^m, 14 de long. Le couteau, très soigneusement exécuté, a 0^m, 10 et repose dans une entaille d'acier en forme de V, ce qui empêche toute rotation autour d'un axe vertical. Deux poids de 100^{gr} glissent sur les bras et permettent de donner au dynamomètre, dans de larges limites, la sensibilité voulue ; des coches déterminent leur position. Le fil $b\beta$ traverse le fléau dans un trou de 2^{mm} de diamètre.

La lecture de la position du dynamomètre se fait sur une échelle de bois de $0^m,65$ de longueur, recourbée suivant un cercle ayant pour centre le miroir; on peut répondre du $\frac{1}{10}$ de millimètre. La correction de non-proportionnalité des couples aux arcs est généralement négligeable.

La partie inférieure du dynamomètre est montée sur un cercle divisé de $0^m,14$ de rayon, mobile à l'aide d'une vis micrométrique, qui facilite les réglages et la détermination des constantes de l'appareil.

Les fils du dynamomètre sont en platine non recuit et ont 100^{μ} de diamètre.

On peut avoir à déterminer les déplacements azimutaux d'un plan tangent au cylindre que forme le fil en expérience. On colle sur le fil un petit miroir léger de $0^m,01$ au plus de diamètre. Le collage se fait à la cire Golaz; il en résulte malheureusement quelquefois une déformation du miroir; mais un collage moins énergique ne lierait pas assez invariablement le miroir au fil.

RÉSULTATS A OBTENIR A L'AIDE DE L'APPAREIL PRÉCÉDENT.

Cet appareil permet de résoudre tous les problèmes de torsion tant statiques que dynamiques.

Soit en effet un mobile dynamométrique de masse m sur lequel agissent des forces connues $F(\alpha)$ en fonction de son déplacement et des forces à étudier représentées par le symbole $\varphi(\alpha)$. Soit v_0 la vitesse du mobile pour $\alpha = 0$, v sa vitesse à un instant quelconque. L'équation la plus générale du mouvement est

$$mv^2 - mv_0^2 = -2 \int_0^\alpha \varphi(\alpha) d\alpha - 2 \int_0^\alpha F(\alpha) d\alpha,$$

en comprenant sous le symbole intégral le travail total des forces qui agissent contre le mobile depuis son départ de la position initiale.

Nous sommes libres d'imposer $F(\alpha)$: l'équation précédente mesure donc pour un mobile dynamométrique le travail de φ . Cette force prend une certaine valeur chaque fois que le mobile passe en α , ce qui ne veut pas dire qu'elle soit fonction déterminée de α : elle peut dépendre non seulement de la valeur actuelle α , mais de toutes les valeurs antérieures de α et de toutes ses dérivées par rapport au temps. Elle peut dépendre aussi de la vitesse absolue v et de ses dérivées par rapport au temps.

Puisque $\varphi(\alpha)$ varie pour une même valeur de α , suivant le manière d'atteindre α , le problème le plus général qu'on puisse résoudre consiste à déterminer les valeurs de $\varphi(\alpha)$ pour α , en supposant, entre les valeurs origine et actuelle de α , tous les états intermédiaires possibles : ce qui revient à donner à $F(\alpha)$ toutes les formes possibles et à étudier la loi des vitesses v .

Revenons au cas de la torsion : $\varphi(\alpha)$ est la loi des couples exercés par l'extrémité inférieure du fil sur le corps dynamométrique, quand on tord l'extrémité supérieure. Nous admettrons que ces forces $\varphi(\alpha)$ ne dépendent pas de la vitesse v du mobile suspendu, mais seulement de l'azimut relatif α des deux extrémités, de toutes les valeurs antérieures de α et de ses dérivées par rapport au temps. Ceci revient à admettre que, par rapport aux vitesses des extrémités du fil, la propagation de la force d'un bout à l'autre est instantanée, ou qu'un mouvement égal et simultané des extrémités ne produit aucune force.

Le problème le plus général peut donc être résolu en donnant aux vitesses v telles valeurs qu'il sera plus commode, puisqu'elles n'interviennent pas directement dans $\varphi(\alpha)$.

L'une des formes qu'on peut imposer à $F(\alpha)$ est $F(\alpha) \equiv 0$, d'où $mv^2 - mv_0^2 = -2 \int_0^\alpha \varphi(\alpha) d\alpha$.

Il faut suspendre au fil un disque, lancer le disque avec

une vitesse v_0 connue et déterminer la loi du mouvement. On a $v = \frac{d\alpha}{dt}$ à un facteur constant près. Connaissant par expérience la loi du mouvement, on peut déduire la valeur $\varphi(\alpha)$ de la force à chaque instant par une dérivation seconde : on connaît donc $\varphi(\alpha)$ pour une loi particulière de variation de α . On suppose nulle la résistance de l'air.

Cette méthode est mauvaise :

1° Parce qu'elle n'est pas exacte. Si précises que soient les expériences, les erreurs sont grossières après deux différences ; la loi $\varphi(\alpha)$ est mal connue. Quand Coulomb conclut de l'isochronisme des oscillations à la proportionnalité de $\varphi(\alpha)$ à α , il se trompe ; car la théorie montre que la durée d'oscillation est minima, lorsque $\varphi(\alpha)$ est linéaire en α , et que pratiquement toute loi voisine donne l'isochronisme. D'ailleurs les oscillations sont loin d'être isochrones ; mais on ne peut, pour la raison précédente, déterminer par cette méthode la forme du terme de correction, quelle que soit pratiquement la précision des expériences.

2° Parce qu'elle n'est pas générale. On ne peut faire varier que la loi du lancement et son amplitude ; tout le reste du phénomène est alors imposé. A la rigueur, on peut généraliser la méthode par l'adjonction d'un amortissement connu ; mais on ne sait à coup sûr produire que l'amortissement logarithmique.

Conservons donc $F(\alpha)$ arbitraire et faisons $v = v_0 = 0$; il vient

$$F(\alpha) + \varphi(\alpha) = 0.$$

A chaque instant la force étrangère, qui est dans nos expériences le couple dû à la torsion du bifilaire, est égale et de signe contraire à la force φ à mesurer et peut lui servir de mesure. L'extrémité inférieure du fil est presque rigoureusement au repos ; il suffit d'imposer à l'extrémité

supérieure une torsion $\alpha = f(t)$ quelconque et de déterminer la loi $F(\alpha) = -\varphi(\alpha)$ par les déformations du dynamomètre. Avec un appareil qui semble purement statique, on peut résoudre le problème dynamique complet.

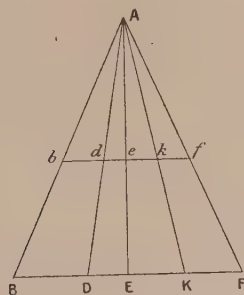
L'extrémité inférieure du fil n'est pas rigoureusement fixe, puisque le dynamomètre se déforme. Mais ces déformations sont faibles, la masse à mouvoir est petite; le produit mv^2 est négligeable. Le poids tenseur n'intervient pas, puisqu'il est lié au dynamomètre par un fil long et fin.

ÉTUDE DES ROTATIONS D'UN MIROIR COLLÉ EN UN POINT DU FIL.

Quelle influence ont les rotations relatives des plans tangents le long d'une génératrice du fil sur la position d'un miroir collé en un point de ce fil?

Supposons le fil cylindrique et homogène et les déformations instantanément propagées : les plans tangents le long d'une génératrice AE (*fig. 4*) sont parallèles. Tor-

Fig. 4.



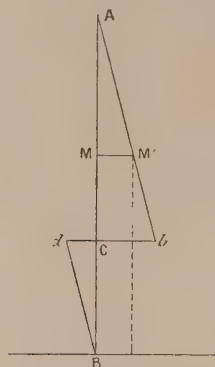
dons le fil par en bas d'un angle EF et prenons perpendiculairement à AE des longueurs ef proportionnelles à la rotation des plans tangents; la courbe obtenue est la droite AF. Lâchons l'extrémité inférieure: cette droite AF, pen-

dant l'oscillation, oscille elle-même autour de la position moyenne AE, si du moins il n'y a pas de déformation permanente.

Si la torsion EF dépasse un certain angle, il y a déformation permanente, mais la courbe des azimuts reste droite; elle oscille seulement autour d'une nouvelle position moyenne AK. Donc si le fil est homogène et la propagation instantanée, rien dans cette courbe ne peut indiquer la déformation permanente, puisque, chaque fois que le plan inférieur revient en K, le plan à la hauteur Ee revient en k.

Nous dirons qu'il y a glissement en un point du fil, si deux plans tangents, contigus sur une génératrice, tournent l'un par rapport à l'autre d'un angle g . Supposons fixes les extrémités du fil; en un point C (fig. 5), il se pro-

Fig. 5.



duit un glissement g ; on demande le déplacement angulaire du plan tangent en un point M, à la distance y de l'extrémité inférieure : le fil étant toujours homogène et les déformations instantanément propagées.

On verra que le déplacement angulaire du miroir est

$$g \frac{l-y}{l},$$

quel que soit le point C, pourvu qu'il soit au-dessous du point M;

$$g \frac{y}{l},$$

quel que soit le point C, pourvu qu'il soit au-dessus du point M.

Par convention un glissement est positif, si le plan supérieur tourne en sens inverse des aiguilles d'une montre, quand on le regarde du zénith, relativement au plan inférieur. Si le fil est tordu positivement par en haut (en sens inverse des aiguilles d'une montre), généralement les glissements sont positifs tout le long du fil. Les extrémités du fil restant immobiles, la rotation du miroir est exprimée en grandeur et en signe par l'intégrale

$$R = \frac{y(l-y)}{l} \left(\frac{1}{y} \int_0^y dg - \frac{1}{l-y} \int_l^y dg \right).$$

Appelons $\frac{1}{b-a} \int_a^b dg$ le glissement moyen entre a et b , la rotation du miroir est positive, si le glissement moyen au-dessous est plus grand que le glissement moyen au-dessus.

Supposons enfin que l'extrémité supérieure tourne d'un angle A_s et l'extrémité inférieure d'un angle A_i , le miroir tourne d'un angle

$$\begin{aligned} \rho &= -A_i \frac{l-y}{l} + R + A_s \frac{y}{l} \\ &= \frac{y(l-y)}{l} \left[\frac{1}{y} \left(\int_0^y dg - A_i \right) - \frac{1}{l-y} \left(\int_l^y dg - A_s \right) \right]. \end{aligned}$$

Une rotation vue du zénith, dans le sens des aiguilles d'une montre, est positive pour l'extrémité supérieure, négative pour l'extrémité inférieure.

Soit maintenant un fil non homogène que l'on tord par en haut. La courbe des azimuts n'est plus rectiligne et la

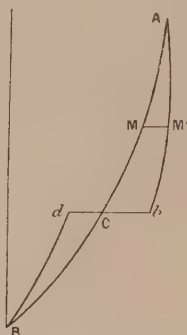
nouvelle condition d'équilibre est que le taux de variation de la rotation des plans tangents le long du fil, $\frac{dx}{dy}$, soit en raison inverse de la constante élastique en chaque point, soit $\psi(y)$. La courbe des azimuts est

$$x = A_s \frac{\Psi(y)}{\Psi(l)},$$

Ψ étant une fonction déterminée par l'état du fil.

Soit AB la courbe précédente (fig. 6). Il se produit

Fig. 6.



en C un glissement : c'est, au point de vue de la nouvelle forme de courbe, comme si A_s devenait $A_s - g$.

Pour les points au-dessous de C, on a

$$x_1 = (A_s - g) \frac{\Psi(y)}{\Psi(l)}.$$

Pour les points au-dessus de C, on a

$$x_2 = (A_s - g) \frac{\Psi(y)}{\Psi(l)} + g.$$

La rotation du point M est

$$\Delta x = \frac{g}{\Psi(l)} [\Psi(l) - \Psi(y)], \text{ si le glissement s'est fait au-dessous;}$$

$$\Delta x = \frac{-g}{\Psi(l)} \Psi(y), \text{ si le glissement s'est fait au-dessus.}$$

Posons

$$R = \frac{\Psi(\gamma)[\Psi(l) - \Psi(\gamma)]}{\Psi'(l)} \left[\frac{1}{\Psi'(\gamma)} \int_0^\gamma d\mathcal{G} - \frac{1}{\Psi'(\gamma) - \Psi'(l)} \int_l^\gamma d\mathcal{G} \right].$$

Les extrémités ayant tourné de A_s et A_i , le déplacement du miroir est

$$\rho = A_s \frac{\Psi(\gamma)}{\Psi'(l)} - A_i \frac{\Psi(l) - \Psi(\gamma)}{\Psi'(l)} + R.$$

DÉFINITIONS.

Un fil est élastiquement homogène quand $\psi(\gamma)$ est une constante; $\Psi(\gamma)$ est alors proportionnelle à γ . Un fil est homogène au point de vue de la cohérence ou des liaisons intérieures, quand $\frac{d\mathcal{G}}{d\gamma}$ est une constante.

Dans un fil complètement homogène, $R = 0$; la rotation d'un miroir est linéaire en A_s et A_i quels que soient les glissements.

Réciproquement, la condition pour que cette rotation soit proportionnelle à A_s pour $A_i = 0$, ou proportionnelle à A_i pour $A_s = 0$, est que R soit nul.

Donc

$$\frac{1}{\Psi(\gamma)} \int_0^\gamma d\mathcal{G} = \frac{1}{\Psi(\gamma) - \Psi(l)} \int_l^\gamma d\mathcal{G}.$$

Il y a peu de chances pour que cette condition soit satisfaite, si elle n'est pas identique; si on l'admet telle, elle revient à poser $d\mathcal{G} = Bdx$, où B est une constante. Si le fil n'est pas élastiquement homogène, deux plans doivent subir un glissement relatif proportionnel à l'angle dont ils tourneraient sous l'influence des seules forces élastiques, la cohérence étant parfaite.

L'élasticité et la cohérence n'étant liées en aucune façon, cette condition ne peut être satisfaite que :

- 1° Si le fil est complètement homogène;
- 2° Si, le fil étant homogène ou non au point de vue élas-

tique, les glissements sont nuls. Cette conséquence est nécessaire, si l'on sait que le fil n'est pas homogène au point de vue des liaisons intérieures ⁽¹⁾.

RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES.

I. La durée de propagation d'une torsion, d'un bout à l'autre du fil, est petite par rapport au temps employé à faire cette torsion. On ne peut la calculer *a priori*, car les formules ordinaires supposent les liaisons rigides. Si la proposition n'est pas exacte, les rotations d'un miroir collé sur le fil doivent varier avec la vitesse de torsion, et les glissements se localiser près de l'extrémité tordue. Or, l'expérience montre que la rotation du miroir, collé sur un fil de 40^{cm} environ en un point quelconque, est

⁽¹⁾ On emploie généralement dans l'étude des phénomènes d'élasticité des locutions contre lesquelles il est bon d'être prévenu. On parle des torsions permanentes ou glissements comme étant de signes + et —.

Quand la position d'équilibre statique (*voir* pour sa définition § XLIII) repasse par la même valeur, on dit que la déformation permanente est nulle. C'est correct, si l'on veut, au point de vue cinématique; au point de vue réel, c'est contraire à l'essence même du phénomène. Une déformation permanente produit des stries; deux déformations permanentes, égales et de sens contraires, produisent deux fois des stries. Elles ne se détruisent pas, elles se superposent : à ce point de vue particulier elles sont toutes positives.

Une propriété quelconque n'est *jamais* fonction de la somme pure et simple des déformations permanentes, sauf évidemment celle qui lui sert de définition.

Quand on promène une lentille sur un bassin pour la polir, un parcours dans un sens ne produit pas nécessairement les mêmes effets qu'un parcours dans un autre sens : viendra-t-il à l'idée de personne de vouloir exprimer le poli ou toute autre propriété de la lentille, en fonction de la position de cette lentille sur le bassin, ou de la longueur du chemin parcouru? Prenons de la poix; pétrissons-la et ramenons-la par deux fois exactement à la même forme; en quoi sommes-nous plus avancés en ce qui est la connaissance des phénomènes intérieurs; cherchons-nous à les exprimer en fonction de la forme du morceau de poix? Tout ceci se résume en un mot : toute transformation permanente dans un fil est irréversible.

indépendante de la vitesse de torsion, au moins tant que cette vitesse est inférieure à 1 tour en $0^s, 1$.

Les rotations varient légèrement pour des vitesses supérieures. Le miroir rompt la continuité du fil. On exagère les effets en le surchargeant d'une masselotte de plomb; les glissements portent alors principalement sur la portion du fil voisine de l'extrémité tordue.

Les vérifications ne se font qu'à $\frac{4}{50}$ près environ, pour la raison suivante: un miroir, collé sur un fil qu'on tord et dont on fixe à un instant donné les extrémités, continue généralement à tourner. Nous étudierons avec soin ces mouvements consécutifs à l'arrêt.

Il résulte de la proposition énoncée que les déformations permanentes, en tous les points du fil, dépendent des propriétés de ces points et non de leurs positions relatives.

II. Un fil non recuit n'est généralement pas homogène au point de vue des liaisons intérieures. En effet, les rotations d'un miroir ne sont pas généralement proportionnelles aux rotations de l'une des extrémités du fil, l'autre restant fixe. Cette non-homogénéité n'est pas créée par la présence du miroir; car, dans cette supposition, la non-proportionnalité serait maxima pour le fil recuit, puisque alors les liaisons intérieures varient le plus possible avec la torsion et qu'il y a plus de chances pour qu'une cause de variation agisse; or, pour les fils recuits, la proportionnalité est presque rigoureuse.

C'est pour les fils non recuits qu'on la rencontre le moins souvent.

On ne change pas les phénomènes pour les fils recuits en collant un second miroir sur le fil. On les modifie avec les fils non recuits, mais cela tient principalement à la modification, par le collage, des points du fil voisins du miroir.

On peut augmenter le moment d'inertie du miroir, coller contre un morceau de papier, même dissymétrique-

ment, sans changer les phénomènes : la non-homogénéité tient bien à la nature même du fil. On reproduit les phénomènes en les exagérant, en recuisant, à l'aide de la flamme d'une lampe à alcool, certaines parties du fil, sans toucher aux autres.

III. Soit un système de courbes $C = \varphi(\alpha)$.

Une propriété en un point A de ce système peut dépendre soit uniquement de la nature et de l'état du fil déterminés par un certain nombre de paramètres, soit en plus des coordonnées du point A, soit en plus du quotient $\frac{dC}{d\alpha}$ et aussi de la vitesse actuelle $\frac{d\alpha}{dt}$, soit même du système entier $C = \varphi(\alpha)$, et peut-être aussi de la manière suivant laquelle il a été parcouru. D'où évidemment une hiérarchie d'importance parmi les propriétés.

Voici une règle expérimentale : pour un fil donné, quel que soit le système antérieur $C = \varphi(\alpha)$, si, après avoir tordu dans un sens et atteint un couple quel qu'il soit, on maintient les extrémités fixes un temps suffisant et qu'on détorde, quelle que soit la vitesse de détorsion, le quotient $\frac{dC}{d\alpha}$ est, au début de la détorsion, déterminé, invariable et caractérise le fil ; soit $C = \Gamma\alpha$ l'équation de la tangente, Γ est une constante absolue.

Cette règle exprime d'abord que la tangente au début de la courbe de détorsion est indépendante des parcours antérieurs : sous la restriction que le temps d'arrêt soit suffisant, au début de toute détorsion les liaisons sont rigides et n'interviennent pas. (Comparez à la citation de Coulomb.)

Elle exprime aussi « que les forces nécessaires pour comprimer ou dilater les particules intégrantes sont proportionnelles aux dilatations et compressions qu'elles éprouvent ». Cette seconde partie est moins essentielle ; elle est vérifiée pour notre fil, elle pourrait ne pas l'être, il faudrait alors modifier la règle énoncée et dire :

« Quelle que soit la vitesse de détorsion, le quotient $\frac{dC}{dx}$ est, au début de la détorsion, une fonction du couple C déterminée, invariable et qui caractérise le fil. » Nous n'avons aucune raison expérimentale pour admettre cette généralisation; nous maintiendrons l'hypothèse de Coulomb.

IV. Soit $C = \Gamma \alpha$ l'équation de la tangente invariable de retour. Voici rectifiés les énoncés de Coulomb :

1° La constante Γ ne dépend pas des températures auxquelles le fil a été porté antérieurement;

2° C'est une fonction déterminée de la température actuelle.

Notre appareil ne nous permet pas d'étudier la variation de Γ en fonction de la température; il est probable que Γ décroît, mais lentement. Nous pouvons, au contraire, vérifier l'assertion 1°. Les preuves alléguées par Coulomb ne valent rien. Il s'appuie sur l'invariabilité de la durée d'oscillation; or, Γ représente seulement la tangente au début de la détorsion. Donc, ou l'on considère un parcours assez étendu, et l'isochronisme n'existe plus; ou l'on prend un parcours infiniment petit, et la précision disparaît. D'ailleurs, dans un phénomène oscillatoire, les conditions imposées pour l'invariabilité de la tangente ne sont pas satisfaites.

En supposant même l'invariabilité élastique des particules intégrantes, la densité du métal diminue par le recuit, le diamètre augmente et, comme le couple croît proportionnellement à la quatrième puissance du diamètre, il se peut que Γ augmente légèrement.

Les expériences directes au dynamomètre donnent ce résultat. On tord et détord de $\frac{1}{2}$ tour; dans ces conditions, la courbe $C = \varphi(\alpha)$ est sensiblement rectiligne.

Pour un fil non recuit, en unités arbitraires, $\Gamma = 1552$; on porte au rouge blanc avec 2^{amp} , 30 pendant 30^s; après refroidissement, on trouve $\Gamma = 1626$.

Pour un autre fil non recuit : $\Gamma = 1175$.

Recuit avec $1^{\text{amp}}, 91 \times 30^s$,	$\Gamma = 1212$,
$2^{\text{amp}}, 20 \times 20^s$,	$\Gamma = 1214$,
$2^{\text{amp}}, 50 \times 20^s$,	$\Gamma = 1220$.

Il est difficile de dire si l'accroissement de Γ est dû à l'accroissement d'élasticité des particules intégrantes ou à une simple augmentation de diamètre.

V. On peut se poser la même question à propos du poids tenseur.

Γ est indépendant du poids tenseur, tant qu'il n'y a pas allongement permanent, sinon Γ diminue, mais il est difficile encore de savoir si cet effet n'est pas dû à une simple diminution de diamètre.

Pour un fil recuit, avec une charge de

$35^{\text{gr}} \dots \dots$	$\Gamma = 3103$	3105	3106
$135^{\text{gr}} \dots \dots$	$\Gamma = 3100$	3106	3106

Les variations indiquées aux § IV et § V sont très faibles, la partie élastique du fil est sensiblement invariable et nous retrouvons précisée la conclusion de Coulomb : on peut faire varier la cohérence sans altérer l'élasticité.

VI. Les fils sont sensiblement homogènes au point de vue élastique.

Si les glissements sont nuls, le fil est élastiquement homogène, quand, ayant tordu l'extrémité supérieure de A_s ($A_i = 0$), on vérifie que la rotation d'un miroir intermédiaire est proportionnelle à A_s .

Or les glissements sont nuls d'après le § III sur les tangentes de départ des courbes de détorsion.

L'expérience montre : 1° sur les tangentes de départ, la rotation du miroir est égale à kA_s , k étant le même nombre constant pour toutes les courbes de détorsion, à quelque couple que corresponde le point de départ; 2° le

coefficient k est égal à $\frac{\gamma}{l}$, autant qu'il est possible de préciser ces longueurs γ et l .

Exemple. — Fil recuit $1^{\text{amp}}, 90 \times 30^s$. On a sensiblement $\gamma = 20^\circ$, $l = 50^\circ$. Si les glissements étaient nuls, le miroir tournerait d'un tour pour $A_s = 360 \times \frac{50}{20} = 900^\circ$.

Mais le fil est plus mou au-dessous du miroir qu'au-dessus; aussi le miroir tourne-t-il d'un tour ($\Delta\rho = 360^\circ$) pour des rotations successives ΔA_s de l'extrémité supérieure de

719, 658, 652, 642, 639, 637, 635, 633°.

Après ces huit tours, on arrête vingt minutes. On détord de $A_s = 20^\circ, 5$; le miroir tourne de $8^\circ, 16$. A ce taux, il faudrait, pour un tour du miroir, une valeur de $A_s = \frac{360 \times 20,5}{8,16} = 904^\circ$; le calcul donne 900° .

Si l'on détord d'un tour complet du miroir intermédiaire, on trouve $A_s = 847^\circ$; les glissements interviennent déjà. On retord de $A_s = 17^\circ, 5$; le miroir tourne de $7^\circ, 00$; à ce taux, il faudrait, pour un tour de miroir, $A_s = \frac{360 \times 17,5}{7,00} = 900^\circ$, concordance inespérée.

L'expérience est frappante quand on détruit artificiellement l'homogénéité de cohérence.

Exemple. — Le miroir est collé au milieu d'un fil. Donc, pour une rotation du miroir de 1 tour, $A_s = 2$ tours. On recuit quelques centimètres au-dessus du miroir; on trouve alors que ΔA_s , étant 2 tours, la rotation du miroir correspondante est successivement au lieu de 1 tour,

$\Delta\rho = 181, 46, 37, 27, 17, 14, 12^\circ$.

On détord de 2 tours, la rotation en sens inverse du miroir remonte à 313° .

VII. La cohérence maxima que la torsion peut donner

à un fil est variable d'un point à l'autre et ne dépend pas seulement de la matière du fil. Il résulterait de la proposition inverse, énoncée par Coulomb, qu'en tordant suffisamment un fil, les glissements finissent par être les mêmes tout le long du fil; par conséquent, quel que soit l'état initial, après une torsion suffisante on aurait $R = 0$.

L'expérience montre que le quotient $\frac{\Delta\rho}{\Delta A_s}$ tend vers une valeur constante, quand A_s croît, valeur qui n'est pas égale à $\frac{\gamma}{l}$. Sa cohérence tend donc vers une valeur asymptotique, mais qui est différente aux différents points du fil et dépend de l'état initial.

Exemple. — $\Delta A_s = 2$ tours, $\Delta\rho =$ successivement :

$$\begin{array}{ccccccccc} 318, & 322, & 328, & 328, & 339, & 351, & 372, \\ & 390, & 396, & 400, & 398, & 395, & 395^\circ. \end{array}$$

Or le $\Delta\rho$ théorique sans glissement ou avec les mêmes glissements tout le long du fil, indiqué par une détorsion de 2 tours, est 318° ; c'est d'ailleurs la rotation obtenue au début.

Ce même fil, recuit au-dessous du miroir, a donné pour des $\Delta A_s = 2$ tours,

$$\Delta\rho = 567, \quad 649, \quad 677, \quad 677, \quad 687, \quad 691, \quad 693, \quad 693^\circ,$$

et, pour une détorsion de 2 tours, $\Delta\rho = 331^\circ$.

$$\frac{\Delta\rho}{\Delta A_s} \text{ tend donc vers une limite très différente de } \frac{\gamma}{l}.$$

ÉTUDE GÉNÉRALE DES COURBES $C = \varphi(\alpha)$, A VITESSE CONSTANTE.

VIII. Quel que soit le parcours simple effectué, à vitesse constante, la tangente à la courbe φ , dont la position au point de départ est déterminée, sous certaines conditions, par la règle III, tourne toujours dans le même sens

(vers la droite de celui qui parcourt la courbe φ) et se rapproche de l'horizontale.

Quel que soit le parcours simple effectué, il n'a aucune symétrie par rapport au couple nul : le passage au couple nul ne correspond en aucune manière à une position singulière de la tangente aux courbes φ . La branche de courbe doit être rapportée au point anguleux immédiatement précédent.

IX. Pour un couple donné C , le quotient $\gamma = \frac{dC}{d\alpha}$ n'est pas déterminé; il dépend de tous les parcours antérieurs, des couples traversés, de l'ordre et de la vitesse suivant lesquels ils l'ont été, et de la durée des arrêts aux points anguleux. Si tous les parcours ont été faits avec une vitesse constante, et si les arrêts aux points anguleux ont eu une durée constante, γ ne dépend que des couples traversés et de l'ordre dans lequel ils l'ont été.

Il est impossible de trouver généralement une forme $C = \varphi(\alpha)$ déterminée, dans laquelle n'entre que des constantes numériques définissant l'état du fil et le couple initial correspondant au point anguleux, et qui représente la courbe de torsion. Chaque élément de parcours apporte une modification déterminée à la valeur des constantes; en d'autres termes, le problème dépend d'un nombre déterminé plus ou moins grand d'équations différentielles non généralement intégrables.

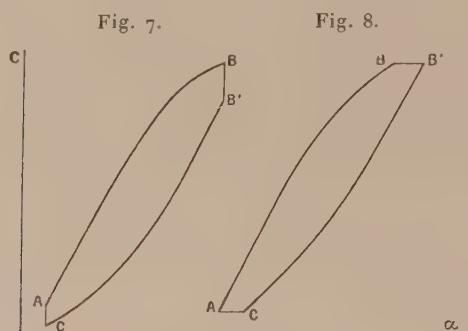
X. Si l'on répète plusieurs fois le même parcours entre les mêmes couples ou entre les mêmes azimuts, les courbes $C = \varphi(\alpha)$, d'aller et de retour, se déforment de moins en moins; elles tendent séparément vers une forme et une position asymptotiques qui sont définies par la valeur des limites et l'état du fil.

Réciproquement, la forme et la position d'un parcours entre couples donnés, alors que ce parcours a été effectué un certain nombre de fois, est la seule définition possible

de l'état actuel du fil. Par définition, *fixer un parcours* est le répéter un nombre n de fois tel que ses modifications ultérieures, pour un nombre $n' > n$, soient négligeables à une approximation donnée. Pratiquement, les parcours sont approximativement fixés après une opération complète ou deux, bien que la fixité pratiquement absolue (elle n'est jamais rigoureuse) ne soit acquise qu'après un nombre d'opérations souvent considérable et qui dépend du parcours.

XI. Dans les parcours à vitesse constante, à cause de l'arrêt T aux extrémités, un cycle complet, même fixé, se compose de quatre branches de courbes dont deux droites.

On parvient (*fig. 7*) au point B suivant AB; pendant l'arrêt T, le couple rétrograde à azimuth constant suivant



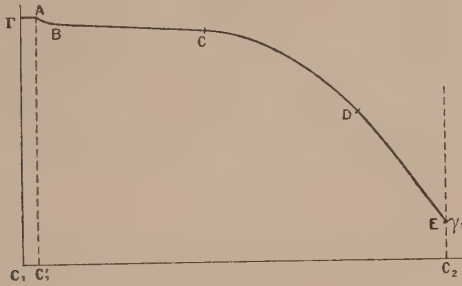
BB'. On détord suivant B'C, il y a rétrogradation suivant CA, et si le cycle est fermé, on parvient au point A, à torsion constante, au bout du temps T.

On parvient (*fig. 8*) au point B suivant AB; supposons que l'appareil permette de maintenir le couple constant à torsion variable; on parvient au point B' au bout du temps T. On détord suivant B'C, et si le cycle se ferme, on retourne au point A au bout du temps T, à couple constant et vitesse variable.

L'idée de fixité pour un cycle, parcouru à vitesse constante (sauf les parties rectilignes) et avec des arrêts donnés T, implique l'invariabilité de forme des courbes AB, B'C et l'invariabilité de longueur des droites BB' et CA. Si ces conditions ne sont pas réalisées, et elles ne le sont jamais rigoureusement, il y a déformation et transport du parcours, qui n'est plus fermé.

XII. Représentons les $\gamma = \frac{dC}{dx}$ en fonction des couples (fig. 9). Le parcours est compris entre les couples inva-

Fig. 9.



riables C_1 et C_2 . Suivant le temps d'arrêt T, à cause de la rétrogradation, on repart d'un couple C_1' plus voisin de l'autre limite C_2 .

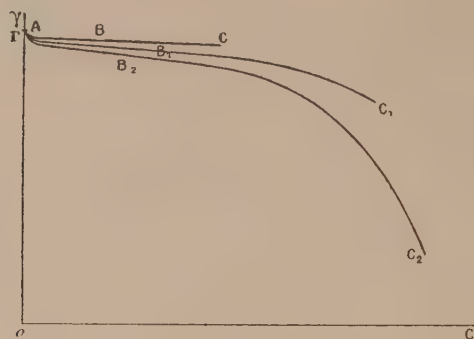
Si T est considérable, la valeur initiale de γ est la valeur caractéristique Γ . Ensuite γ diminue constamment, d'abord brusquement suivant AB (cette diminution est généralement très petite, inférieure à $0,02\Gamma$), très peu suivant BC et à peu près linéairement, rapidement entre C et D. La courbe des γ aboutit enfin suivant DE à la valeur γ_1 pour l'autre limite C_2 .

Si T n'est pas suffisamment grand, la valeur initiale de γ est plus grande que Γ ; la courbe a la même forme générale.

La brusque diminution de γ , entre A et B, pourrait être

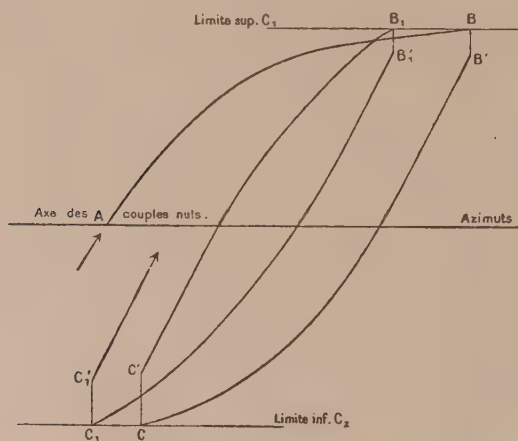
attribuée à l'insuffisance de T , puisqu'on peut l'exagérer en diminuant T . Cependant, même après un arrêt de

Fig. 10.



plusieurs jours, cette diminution brusque persiste. De plus, la valeur initiale de γ en A est bien la valeur carac-

Fig. 11.



téristique et non celle qui serait indiquée par le prolongement de la droite BC pour le couple C_1 .

XIII. Supposons $C_1 = -C_2$ (fig. 11), et choisissons

une vitesse v de torsion et un temps T constants. Posons

$$C_1 - C_2 = n\Gamma.$$

Le parcours fixé serait complètement déterminé par l'état actuel du fil. Mais il ne l'est pas immédiatement et, à partir du couple nul, on décrit le chemin $AB B' C C', \dots$ (*fig. 11*). Soient $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha''_1, \dots, \alpha_2, \alpha'_2, \alpha''_2, \dots$ les azimuts successifs des points $B, B_1, \dots$ et $C, C_1, \dots$, extrémités des branches du parcours. Par définition, la valeur absolue de $\alpha_1 - \alpha_2$, exprimée en tours, est l'amplitude du parcours $B' C, \dots$. Si le parcours est approximativement fixé, nous pouvons prendre la moyenne M des amplitudes de deux parcours simples consécutifs, comme mesure de la mollesse du fil. Si cette quantité diminue, le fil se durcit par définition; si elle augmente, le fil se ramollit.

Exemple. — Fil recuit avec $1^{\text{amp}}, 80 \times 60^s$,

$$T = 10^m, \quad v = 1 \text{ tour en } 140^s, \quad n = 2,54;$$

les moyennes successives sont $M = 2,88, 2,76, 2,75$; le cycle tend à se fermer.

Passons alors au cycle $n = 4,23$, les moyennes sont

$$M = 6,62 \quad 5,22 \quad 5,19.$$

Le rapport $\frac{n}{M}$ diminue, comme on devait s'y attendre d'après la forme générale des courbes.

Revenons au parcours $n = 2,54$, on trouve $M = 2,64$.

Le fil est durci pour un parcours, par un parcours de limites plus écartées.

Le durcissement ne croît pas indéfiniment, pour le même parcours, quand on écarte les limites des parcours plus grands destinés à le durcir.

Passons au cycle $n = 4,87$, $M = 17,35, 14,11, 14,09$.

Revenons à $n = 2,54$, on retrouve $M = 2,64$.

Ce résultat n'est pas général; les fils non recuits, qui

ont au début leur dureté maxima, sont plutôt fatigués par les grands parcours, qui amènent un ramollissement pour les petits.

Exemple :

$$n = 5,81 \dots \quad M = 6,00 \quad 5,95 \quad 5,95$$

$$n = 11,63 \dots \quad M = 18,84 \quad 19,88.$$

M augmente pour n constant.

Retour à $n = 5,81 \dots \quad M = 6,33.$

M a augmenté.

Même dans le cas des fils recuits le durcissement est très faible; quand on passe de $n = 2,54$ à $n = 4,23$, et qu'on voit les M tomber de 6,62 à 5,22, on pourrait s'imaginer que le fil a été durci considérablement et d'une façon permanente; c'est à peine si le M, pour $n = 2,54$, a diminué de $\frac{1}{20}$.

XIV. On tiendra compte des faits précédents pour comparer les courbes correspondant à des n différents et les rapporter au même état de dureté générale du fil.

Ces précautions prises, l'expérience montre (*fig. 10*) que les courbes γ en fonction de C sont, pour des n croissants, les unes sous les autres. La figure exagère beaucoup les différences; les courbes qui partent de l'ordonnée Γ sont presque confondues au début et ne se détachent nettement les unes des autres que pour des n assez grands.

Ainsi, pour $n = 2,54$, le ΔC , correspondant à $2^t, 50$ et compté à partir de l'extrémité du parcours, est $2,39 \Gamma$; pour $n = 4,23$, le même ΔC est $2,37 \Gamma$. Les courbes coïncident à 1 pour 100 près.

XV. Étudions le mode de fixation des parcours. Le fil est recuit, ou du moins sa dureté est supposée croître. On part (*fig. 11*) du couple nul et l'on parvient au couple C_1 supposé positif (nous l'appellerons *extrémité supérieure*) par une rotation vers la droite comptée positivement.

Le point B se déplace positivement, s'il vient en B_1 dans l'intervalle des azimuts des points B et C. Même définition pour le point C. Dans la *fig.* 11, B venant en B_1 se déplace positivement; C allant en C_1 se déplace négativement.

Règle. — Quelle que soit la grandeur $G = C_1 - C_2$ du parcours, le déplacement de B est positif; le déplacement de C, positif ou négatif suivant les cas, est inférieur au déplacement de B. Les courbes se déplacent en bloc vers la gauche et se redressent.

Voici comment il faut comprendre cet énoncé. Les déplacements $BB_1, CC_1, B_1 B_2, C_1 C_2, \dots$ ne forment pas une série continûment décroissante. Mais si $\varepsilon_1, \varepsilon'_1, \varepsilon_2, \dots$ sont des nombres tous positifs, la série $BB_1 - \varepsilon_1, CC_1 + \varepsilon'_1, B_1 B_2 - \varepsilon_2, \dots$ est continûment décroissante.

L'axe des couples nuls n'est pas une droite de symétrie pour l'ensemble du parcours.

Ces effets sont des applications de la règle générale : tout glissement dans un sens déplace dans ce sens la droite de symétrie, rend plus difficiles les glissements dans ce sens et facilite les glissements en sens opposé.

XVI. La même dissymétrie se retrouve dans la longueur des droites $BB', CC', \dots$

Dans l'exemple cité au § XII ($T = 10^m$; vitesse, 1 tour en 140^s), $n = 4, 23$.

$$\begin{aligned} BB' &= 0,063\Gamma, & CC' &= 0,074\Gamma, \\ B_1 B'_1 &= 0,049\Gamma, & C_1 C'_1 &= 0,071\Gamma, \\ B_2 B'_2 &= 0,048\Gamma. \end{aligned}$$

Enfin et corrélativement, elle se retrouve dans la forme des courbes elles-mêmes $B'C, C'B_1, \dots$

Les tangentes γ d'aboutissement en C, $C_1, \dots$, sont plus petites que les tangentes d'aboutissement en B, $B_1, \dots$:

ce qui rentre dans la règle plus générale: la déperdition à l'arrêt augmente à mesure que diminue le quotient

$$\gamma = \frac{dC}{dx} \text{ au point d'arrêt.}$$

Les portions de courbes $B'C$, $C'B_1$, ..., voisines des points de départ, coïncident rigoureusement si T est assez grand; sinon le $\gamma = \frac{dC}{d\alpha}$ est sensiblement plus grand au début des courbes, lorsque pendant l'arrêt précédent la déperdition a été plus grande.

N. B. Quand on dit que des quantités $b, d, f, \dots$ sont, toutes choses égales d'ailleurs, plus grandes que d'autres quantités alternées $a, c, e, \dots$, cela signifie que la série a, b, c, d n'est pas continûment croissante ou décroissante, mais que la série $a + \epsilon_1, b - \epsilon_2, c + \epsilon_3, \dots$ est continûment croissante ou décroissante, $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ étant des quantités positives.

XVII. Obtention des parcours complètement symétriques. — Pour obtenir un parcours complètement symétrique, entre limites C_1 et C_2 ($C_1 = -C_2$), il ne faut pas aborder immédiatement le parcours total, mais suivre une série régulière croissante

$$0, C', -C'', C''', -C^{IV},$$

avec la condition que la différence de deux termes consécutifs soit petite. On choisira, par exemple, une progression arithmétique ou géométrique.

La grande difficulté de l'opération est de partir du zéro : car la dissymétrie qui, vu la forme des courbes φ , peut ne pas apparaître dans les petits parcours, devient énorme dans les grands. Avec notre appareil, le dynamomètre étant suspendu au fil à étudier et par conséquent n'étant pas réglable séparément, on ne pouvait certifier *a priori* la position du zéro qu'à $\frac{1}{50}$ de Γ près. Aussi, malgré toutes les précautions, n'obtenait-on pas à coup sûr des parcours rigoureusement symétriques.

Un parcours dissymétrique à limites $\pm C_1$, peut être rendu complètement symétrique comme suit :

Supposons qu'on ait débuté par $+C_1$; pour rétablir la symétrie, parvenu en $-C_1$, on continue vers $-C'_1$ ($C'_1 > C_1$). La dissymétrie est ainsi diminuée entre $\pm C_1$; on peut naturellement l'inverser en prenant C'_1 suffisamment plus grand que C_1 . Il n'est même pas nécessaire de dépasser $-C_1$; il suffit de tordre à couple constant $-C_1$ pendant un temps suffisant.

Un parcours dissymétrique à limites $\pm C_1$ étant donné peut-on obtenir un parcours plus grand symétrique entre limites $\pm C'_1$?

Supposons qu'on ait débuté par $+C_1$: on peut agrandir le parcours de deux façons :

1° Parvenu en $-C_1$, on retourne à $+C'_1$; le chemin total est

$$0, +C_1, -C_1, \dots, -C_1, +C'_1, -C_1, \dots;$$

la dissymétrie est augmentée.

2° Parvenu en $+C_1$, on retourne à $-C'_1$; le chemin total est

$$0, +C_1, -C_1, \dots, +C_1, -C'_1, +C'_1, \dots;$$

on diminue la dissymétrie.

Pour que le nouveau parcours soit symétrique, il faut que C_1 et C'_1 diffèrent suffisamment; si par exemple C'_1 n'est pas au moins deux fois plus grand que C_1 , l'influence du premier parcours prédomine.

Nous verrons, dans un prochain Mémoire sur les parcours effectués sinusoïdalement, comment on obtient à coup sûr des parcours rigoureusement symétriques (*).

(*) Il semble qu'on puisse donner explicitement la forme des courbes de torsion, au moins dans un cas parfaitement déterminé, parcours fixés et vitesse de torsion très petite.

L'hypothèse la plus simple, due à M. Brillouin, consiste à admettre

XVIII. Un parcours de grandeur $G = C_1 - C_2$, fixé entre limites égales et de signe contraire, étant donné,

que, dans ce cas, $\frac{dg}{dC}$ est proportionnel au glissement g , la courbe étant rapportée à la tangente de retour au point anguleux. On a donc

$$\frac{dg}{dC} = mg,$$

m étant une constante ;

$$g = E(e^{mC} - 1), \quad \alpha = \frac{C}{\Gamma} + E(e^{mC} - 1).$$

Coulomb avait énoncé une règle analogue; il dit dans son Mémoire : « L'accroissement de la réaction élastique (mesurée par C), après que le centre de réaction a été déplacé d'un certain angle (c'est le glissement g), est à peu près en raison inverse de l'angle de déplacement » ; d'où l'équation

$$\frac{dC}{d\alpha} = \frac{1}{mg}, \quad \alpha = \frac{C}{\Gamma} + Ee^{mC} + \frac{1}{m\Gamma}.$$

Cette forme donnerait, pour $g = 0$,

$$\frac{dC}{d\alpha} = \alpha,$$

ce qui n'est pas.

L'hypothèse de M. Brillouin revient à admettre que les modifications, produites par le glissement et qui accroissent le champ d'élasticité, sont d'autant plus faibles que le glissement a été plus grand.

M. Brillouin pense de plus que les constantes de la formule sont indépendantes de l'amplitude des parcours, à la condition qu'ils soient fixés et tous plus petits qu'un parcours déjà fixé. (Comparez au § XIV.)

Quelque intérêt que puisse présenter la vérification de ces idées, une circonstance la rend très difficile. Pour des parcours de faible amplitude le calcul séparé des constantes E et m est impossible; car si l'on développe suivant les puissances de C , on trouve

$$\alpha = C \left(\frac{1}{\Gamma} + mE \right) + \frac{C^2 Em^2}{2}.$$

Or, mE est petit devant $\frac{1}{\Gamma}$; c'est même à cette condition que, malgré les règles énoncées, nous pouvons choisir la forme ci-dessus pour représenter les expériences. La direction de départ comporte toujours une certaine incertitude à cause des mouvements consécutifs à l'arrêt, et cette incertitude est de l'ordre de mE . Donc, toutes les fois que l'on ne peut pas faire intervenir les termes en C^2 , le calcul séparé de m et E est impossible, et la connaissance même du produit mE est toujours incertaine.

on étudie son déplacement dans le champ des couples, G restant constant.

Exemple. — Fil recuit

$$1^{\text{a}}, 80 \times 60^{\text{s}}, \quad T = 10^{\text{m}}, \quad \nu = 1 \text{ tour en } 140^{\text{s}}, \quad C = 2,54 \Gamma,$$

Pour le parcours à limites symétriques, $M = 2,64$.

On transporte la limite supérieure à $2,54 \Gamma$, la limite inférieure est au couple nul

$$M = 2,66, \quad 2,67, \quad 2,66.$$

On transporte la limite inférieure à $-2,54 \Gamma$, la limite supérieure est au couple nul

$$M = 2,70, \quad 2,70, \quad 2,67, \quad 2,67.$$

Les mollesses ont cru légèrement et un peu plus du côté de la deuxième torsion. (Conf. XV et XVI.)

Dans le transport, il y a une perte considérable d'énergie; les courbes qui gagnent les couples $\pm 2,54 \Gamma$ sont très infléchies; la perte croît beaucoup plus vite que le déplacement.

Le retour dans une situation immédiatement antérieure absorbe une énergie beaucoup moindre. Après l'expérience précédente, on est revenu à la position symétrique et l'on a retrouvé $M = 2,64$.

XIX. On rencontre dans l'interprétation des nombres M une difficulté que l'expérience suivante met en évidence. Soit un parcours de grandeur $G = 0,634 \Gamma$.

Pour le parcours à limites symétriques et $T = 5^{\text{m}}$, on trouve

$$M = 0,634.$$

Transportons l'extrémité supérieure à $2,54 \Gamma$. Pour un arrêt $T = 5^{\text{m}}$,

$$M_1 = 0,625;$$

pour un arrêt, $T = 10^6$,

$$M_2 = 0,639,$$

$$M_1 < M < M_2.$$

Mais pendant les cinq minutes d'arrêt, la déperdition à l'extrémité supérieure du parcours équivalait à une détorsion sans glissement de $0^t,055$; il y avait cela de moins à détordre.

Plus le parcours est petit, et les limites éloignées du couple nul, plus augmente l'effet de cette déperdition pendant l'arrêt sur la valeur de M en tant qu'erreur relative.

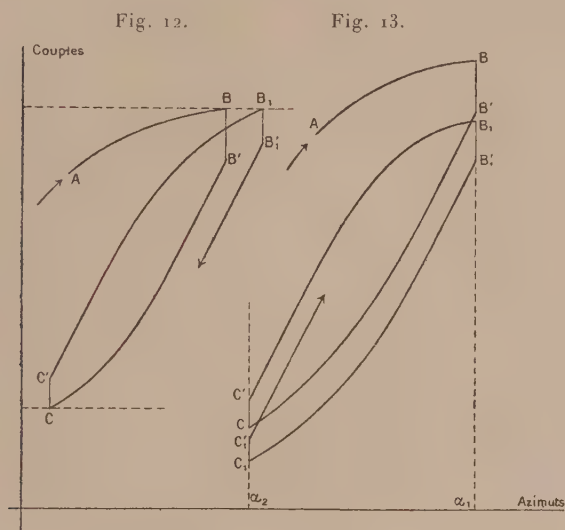
On ne précise pas le sens de M en diminuant T , parce que, même pendant la détorsion, il y a, au début, cession et, suivant les idées adoptées dans ce travail, détorsion interne. On préciserait au contraire le sens de M en diminuant la vitesse de rotation, parce que la déperdition, pendant l'arrêt, diminue proportionnellement à cette vitesse, si elle est très petite. Les glissements jouent donc deux rôles différents; au début de la détorsion, ils diminuent M ; ils tendent ensuite à l'augmenter.

XX. Étudions les règles générales de déformation des parcours placés comme on voudra dans le champ des couples. A partir du couple nul (*fig. 12*) on gagne directement l'extrémité C_1 du parcours dont les limites C_1 et C_2 sont toutes deux positives. Les déplacements du point B sont négatifs; ceux du point C sont positifs. La boucle se redresse et se transporte vers la droite: les courbes d'aller et de retour se rapprochent, le parcours tend vers un état limite de stabilité.

Si l'on déplace le parcours sans changer sa grandeur, si on l'amène, par exemple, tout entier au-dessous de l'axe des couples nuls, il n'y a rien de changé dans la règle précédente que le nom des extrémités. Il y a déplacement en bloc vers la gauche.

La règle subsiste, si le parcours est à cheval sur l'axe des couples nuls; toutefois les dissymétries connues interviennent; suivant les glissements antérieurs, le transport se fait vers la droite ou la gauche.

La droite de symétrie correspondant à un état donné du fil est telle que le parcours dont les extrémités sont à égale distance de part et d'autre de cette droite, ne subit pas de transport en bloc et ne fait que se redresser et s'aplatir.



XXI. *Des boucles à partir d'un couple donné, l'autre étant variable.* — A partir du couple nul, on va au couple positif et grand C_1 . A partir de cette extrémité supérieure invariable, on effectue des parcours de grandeur G croissante. Quand G est assez petit et le ΔG d'un parcours à l'autre assez grand, les différentes boucles s'enveloppent les unes les autres.

A partir d'un certain G , le mouvement vers la droite de l'extrémité supérieure s'arrête, puis rétrograde. Son déplacement devient positif, les boucles cessent de s'enve-

lopper. Si l'on appelle C_2 le couple limite variable, le déplacement de l'extrémité C_1 change de signe, alors que $C_1 + C_2$ est encore positif.

Le quotient $\gamma = \frac{dC}{d\alpha}$ sur la courbe ascendante et à l'extrémité supérieure diminue quand G croît; la déperdition consécutive à l'arrêt croît.

XXII. *Des boucles entre azimuts donnés (amplitude constante) (fig. 13).* — Le déplacement du point B en B_1 est positif si le couple correspondant à B_1 est en dehors de l'intervalle des couples correspondant aux points B et C. Ainsi, dans la figure, le déplacement de B en B_1 est négatif; le déplacement de C en C_1 est positif.

Le parcours est, par hypothèse, tout entier d'un côté de l'axe des couples nuls; le point B est abordé directement à partir du couple nul. Le déplacement de B est négatif, celui de C est positif. Il y a redressement et aplatissement de la boucle, et mouvement d'ensemble vers l'axe des couples nuls.

Supposons que le parcours, assez petit, soit au début symétrique par rapport à l'axe des couples nuls. A cause des dissymétries connues, le déplacement de B est positif, celui de C est négatif, comme si les premiers glissements avaient déplacé vers le haut l'axe des couples nuls.

Si la dissymétrie est assez faible par rapport à la variation de la durezza ou au durcissement, les deux déplacements sont positifs; puis, à mesure que le durcissement diminue, la dissymétrie restant à peu près constante, l'un des déplacements s'annule et change de signe.

XXIII. Lorsqu'il y a déplacement d'ensemble d'un parcours, la dissymétrie dans la forme des courbes, signalée au § XVI, s'exagère beaucoup.

Exemple. — Fil recuit : $1^{\text{amp}}, 75 \times 30^{\text{s}}$; $G = 4,207$. On va d'abord en B ($C_1 = 2,772$) et l'on oscille entre ce couple et le couple $C_2 = -1,435$. Le déplacement d'ensemble s'effectue vers la droite.

Courbes.	Amplitudes.	Tangente moyenne de départ	Tangente vraie d'arrivée γ .	Déperdition consécutive à l'arrêt en dix minutes.
		pour le 1 ^{er} tour.		
AB	»	»	»	89
B' C.....	5,058	0,979	0,566	57
C' B ₁	5,183	1,000	0,384	81
B' ₁ C ₁	4,977	0,977	0,581	53
C' ₁ B ₂	5,092	1,000	0,440	73
B' ₂ C ₂	4,958	0,977	0,568	58
C' ₂ B ₃	5,044	0,997	0,478	68

Au début des courbes, les tangentes vraies, après un arrêt de dix minutes, sont très voisines de Γ ; on donne les tangentes moyennes pour un tour; à l'extrémité des courbes, on donne les tangentes vraies.

Pour les courbes de retour, $B'_n C_n$, les tangentes moyennes de départ sont plus petites, les tangentes vraies d'arrivée plus grandes et les amplitudes plus petites que pour les courbes d'aller $C'_n B_{n+1}$.

Les déperditions sont proportionnelles à $\Gamma - \gamma$.

XXIV. *Influence de la tension.* — Un fil qui, non tordu, supporte indéfiniment sans allongement une certaine charge, s'allonge pendant la torsion, après un glissement suffisant; l'allongement cesse avec la torsion.

Quand le fil a été considérablement tordu dans un sens, le couple croît très peu et sensiblement comme la torsion; l'allongement est lui-même à peu près proportionnel à la torsion, bien que légèrement décroissant.

On observe dans un microscope possédant un oculaire à vis micrométrique; les pointés se font sur une marque tracée sur le fléau du dynamomètre, et au micron près. La division du tambour du micromètre vaut $0^m,653$. Pour un fil de $0^m,50$, recuit avec $1^{amp},80 \times 30^s$, chargé de 141^{gr} (et ayant beaucoup servi), on a trouvé comme allongement par torsion de 1 tour :

41, 42, 40, 41, 36, 38, 38, 39, 38 microns.

Si l'on change la vitesse de torsion, l'accroissement du couple par tour et aussi l'allongement demeurent invariables. Enfin si, toujours sur cette portion extrême de la courbe φ , on augmente la tension, l'allongement par tour augmente, et beaucoup plus vite que proportionnellement au poids tenseur.

Un allongement est donc lié à tout accroissement dans le champ des couples explorés.

XXV. Il n'y a pas proportionnalité entre l'allongement dl et le glissement dg . Sur une courbe φ , le quotient $\frac{dl}{d\alpha}$, nul au départ, croît très lentement, bien plus lentement que $\frac{dg}{d\alpha}$, jusqu'à ce que γ soit une fraction plus ou moins petite de Γ qui dépend du poids tenseur; le quotient $\frac{dl}{d\alpha}$ croît alors très vite et tend vers une limite qu'il atteint lorsque γ diffère peu de 0.

L'expérience suivante montre les particularités du phénomène.

Fil recuit avec 1^{amp}, 80×30^s , vitesse de torsion, 150^s par tour. Charge 106^{gr}. On fixe le parcours $G = 2,09$.

On donne, dans le Tableau suivant, les allongements a totaux par parcours.

Pendant les arrêts (5^m) les allongements sont nuls (malgré les glissements).

On va du couple nul à l'extrémité supérieure

$$C_1 = 1,045, \quad \alpha = 97^\mu.$$

On oscille ensuite entre C_1 et $C_2 = -C_1$:

$A = 6,094$	$\alpha = 274^\mu$	$A = 2,470$	$\alpha = 0$
2,558	20		
2,483	10	2,401	0

Ainsi les parcours de $C_2 = -C_1$ à $+C_1$ (qui ont une

amplitude moindre et une tangente terminale γ plus grande) correspondent à un allongement nul; les parcours inverses correspondent à des allongements décroissants mais notables.

On augmente le parcours : $G = 2,51$. Du couple $-1,045$ à $+1,255$, $A = 2,701$, $a = 0$.

On oscille alors entre C_1 et C_2 .

$A = 7,662$	$a = 234^{\mu}$		
3,475	25	$A = 3,300$	$a = 0$
3,355	14	3,214	0

Les allongements ont à peine augmenté, bien que les glissements totaux par parcours aient notablement augmenté, comme l'indique l'accroissement du rapport $\frac{A}{G}$.

On porte la charge à 176^{gr} ; il y a un brusque allongement qu'il est impossible de mesurer parce qu'il faudrait faire la part du redressement des fils du dynamomètre. Le couple tombe de $-1,255$ à $-0,883$.

On retourne à $+1,255$, $A = 2,831$, $a = 53$, et l'on oscille.

$A = 6,662$	$a = 539$		
3,025	44	$A = 2,892$	$a = 12$
2,933	28	2,833	6

On voit qu'à la grandeur $G = 2,51$ et à la tension 176^{gr} , les parcours d'aller et de retour produisent l'allongement; cependant les amplitudes ont diminué, le fil est devenu plus dur.

Tout allongement est suivi d'un durcissement; c'est probablement le mode d'écroutissage des fils tordus. Si l'on abandonne pendant plusieurs heures un fil fortement tendu, il s'allonge et s'écroutit.

DES MOUVEMENTS CONSÉCUTIFS A L'ARRÊT.

XXVI. On peut considérer la torsion comme une source de couple; le couple gagné est, pour une torsion $d\alpha$, égal à $\Gamma d\alpha = \Gamma v dt$, si v est la vitesse de torsion, puisque nous avons admis que les particules intégrantes sont non seulement parfaitement élastiques, mais donnent un couple proportionnel à leur déformation. Mais les liaisons ne sont pas rigides; leur cession dans le temps dt sera représentée par χdt , et l'équation générale d'une courbe de torsion est

$$dC = \Gamma d\alpha - \chi dt = (\Gamma v - \chi) dt, \quad \chi = v(\Gamma - \gamma).$$

La fonction χ n'est pas déterminée en fonction des couples; pour un parcours donné effectué dans des conditions données, on peut la supposer exprimée en fonction de C par une équation sous forme finie, à la condition de n'appliquer cette forme et ses dérivées que sur la courbe même qu'elle représente.

Si l'on arrête la torsion en un point d'une courbe φ , il y a une certaine perte de couple qui *a priori* n'a aucun rapport avec la fonction χ relative au point d'arrêt; nous nous proposons de la déterminer expérimentalement. Décrivons un parcours à vitesse constante v ; parvenu en un certain couple, déterminons le ΔC en un nombre donné de secondes, ce qui permet, connaissant v , de calculer le coefficient angulaire γ , de la tangente à la courbe de torsion.

Arrêtons brusquement et déterminons la déperdition totale p en fonction du temps.

Pour un fil donné, si l'on borne la déperdition à des durées pas trop longues (nous allons voir pourquoi), on a $p = (\Gamma - \gamma) \Pi(t)$, la fonction Π étant la même tout le long de la courbe de torsion.

En d'autres termes, la déperdition p est, pour une vitesse donnée v , supposée constante, proportionnelle à la valeur de la fonction χ de déperdition au couple d'arrêt. Si $\gamma = \Gamma$, c'est-à-dire au point anguleux, sur la courbe de retour et après un arrêt suffisant, $p = 0$; elle a sa valeur maximum pour les torsions considérables, puisque alors γ est voisin de 0.

XXVII. On peut déterminer *a priori* dans quelles limites la loi précédente a chance d'être rigoureuse. La portion de courbe de torsion, qui précède immédiatement l'arrêt, est caractérisée par une certaine loi de variation des γ , qui décroissent pour aboutir à la valeur γ_1 correspondant au couple d'arrêt. Pendant l'arrêt, on repasse en sens inverse par les mêmes couples et la loi de déperdition dépend évidemment des γ relatifs à ces couples sur la courbe de torsion; elle ne peut donc être complètement définie par la valeur γ_1 à l'arrêt que si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- 1° Les coefficients angulaires antérieurs à γ_1 en diffèrent peu ;
- 2° Ils dépendent de γ_1 suivant une loi complètement déterminée.

Nous disons que la déperdition est normale, lorsque la condition (1°) est satisfaite. Elle l'est toujours pour la déperdition au début ; d'où la règle du paragraphe précédent et la restriction qu'on y a apportée. La déperdition normale est évidemment caractérisée par la vitesse de déperdition immédiatement après l'arrêt. On peut donc prendre comme paramètre la déperdition $p_{0,5}$ déterminée pour 30^s; la loi de déperdition supposée normale est alors définie par la valeur de ce paramètre et les rapports $\frac{p}{p_{0,5}}$; l'unité choisie est la minute.

XXVIII. On réalise les conditions de la déperdition normale le plus facilement pour des fils non recuits et

dans les conditions suivantes. Après une torsion notable dans un sens, on arrête le mouvement, on attend l'état permanent, et on repart en sens opposé. Parvenu en un certain couple, on détermine le γ_1 , on arrête brusquement, on mesure la déperdition pendant 30^m par exemple; on repart dans le même sens et l'on recommence l'opération pour différentes valeurs de γ_1 .

On réalise ainsi à peu près rigoureusement la condition (1°), car la déperdition est relativement assez faible pour qu'on repasse seulement par des couples pour lesquels les γ de la courbe de torsion diffèrent peu de γ_1 .

Exemple : Fil non recuit, vitesse un tour en 112 secondes :

$$p_{0,5} = 0,094 (\Gamma - \gamma'_1),$$

$$p_3 = 0,257 (\Gamma - \gamma'_1),$$

$$p_{10} = 0,319 (\Gamma - \gamma'_1).$$

Les expériences sont assez précises pour que, malgré la petitesse des quantités à mesurer, les nombres expérimentaux ne diffèrent pas de $\frac{1}{70}$ des moyennes énoncées.

XXIX. Reste à déterminer la loi $\Pi(t)$. On peut admettre que le seul fait de subir la déperdition de couple dp amène, pour la vitesse de déperdition, une diminution relative proportionnelle à dp .

En appelant π cette vitesse $\pi = \frac{dp}{dt}$, on peut poser $\frac{d\pi}{\pi} = -\frac{dp}{A}$, ce qui donne $p = A \log(Bt + 1)$ puisqu'on doit avoir $p = 0$ pour $t = 0$. Par convention $p = 1$, pour $t = 0^m,5$. Cette formule donne une vitesse initiale de déperdition finie $= AB$. Pour $t = \infty$, elle donne une déperdition infinie; et, en effet, si la tangente à la courbe de torsion conservait indéfiniment la même inclinaison, la déperdition, qui serait normale absolument, devrait continuer indéfiniment; si elle s'arrête, c'est précisément que l'hypo-

thèse (1°) ne s'applique plus; la déperdition cesse d'être normale (1°).

Au point de vue numérique, la formule est très bonne.

Elle indiquerait, par exemple, les rapports

$$1,000, \quad 2,771, \quad 3,381,$$

au lieu des nombres expérimentaux

$$1,00, \quad 2,73, \quad 3,39.$$

Le Tableau suivant facilite les comparaisons.

Calcul de la fonction $p = A \log(Bt + 1)$

avec les conditions $p = 0$ pour $t = 0$, $p = 1$ pour $t = 0,5$.

	$t = 1.$	$t = 5.$	$t = 10.$	$t = 20.$
$p = 5,677 \log(t + 1).$	1,709	4,417	5,910	7,505
$3,322 \log(2t + 1).$	1,584	3,460	4,392	5,358
$2,512 \log(3t + 1).$	1,512	3,024	3,745	4,484
$2,096 \log(4t + 1).$	1,465	2,771	3,381	4,000
$1,838 \log(5t + 1).$	1,430	2,600	3,139	3,683
$1,661 \log(6t + 1).$	1,404	2,477	2,965	3,460
$1,531 \log(7t + 1).$	1,382	2,382	2,834	3,290
$1,431 \log(8t + 1).$	1,365	2,308	2,730	3,158
$1,350 \log(9t + 1).$	1,350	2,245	2,645	3,048
$1,285 \log(10t + 1).$	1,337	2,197	2,575	2,959

Plus l'expérience est prolongée, plus il y a de chances qu'on s'éloigne d'une déperdition normale, sans qu'il soit possible de dire *a priori* dans quel sens on doit s'en écarter.

(1°) M. Brillouin propose la forme $p = 1 - 10^{-\sqrt{t}}$ pour le calcul des facteurs caractéristiques de la loi de déperdition normale. Cette formule a l'inconvénient de donner au début une vitesse de déperdition infinie, ce qui ne paraît pas répondre à la nature du phénomène; cependant elle représente fort bien les expériences, pourvu que le temps ne soit ni trop petit (inférieur à 30°), ni trop grand (supérieur à quelques minutes). Elle peut être souvent utile dans le calcul numérique.

On donne dans le Tableau suivant le résultat d'une expérience ayant duré vingt-quatre heures, et faite dans une cave à l'abri des variations de température. Outre les nombres expérimentaux, on donne les nombres I calculés avec la formule $p = 1,431 \log(8t + 1)$ et II calculés avec la formule $p = 1,350 \log(9t + 1)$.

Temps.	Nombres observés.	Calcul I.	Calcul II.
10 ^s	0,573	0,525	0,536
30 ^s	1,000	1,000	1,000
1 ^m	1,333	1,365	1,350
5 ^m	2,234	2,308	2,245
10 ^m	2,666	2,730	2,645
20 ^m	3,135	3,158	3,048
120 ^m	4,557	4,267	4,095
540 ^m	5,916	5,200	4,977
1440 ^m	6,817	5,812	5,552

L'expérience montre que la variation du poids tenseur influe peu sur la loi de déperdition.

XXX. *Influence de la vitesse v de rotation.* — La loi de déperdition dépend de la vitesse de rotation; si on la représente par la forme $p = A \log(Bt + 1)$ avec la condition $p_{0,5} = 1$, le paramètre B croît avec la vitesse. Pour des vitesses croissantes, la déperdition est de plus en plus rapide au début.

Exemple :

Vitesse en tours par minute.	Rapports $\frac{p}{p_{0,5}}$ pour les temps			
	1 ^m .	5 ^m .	10 ^m .	20 ^m .
0,882.....	1,35	2,29	2,70	3,15
0,504.....	1,42	2,64	3,41	3,91
0,112.....	1,55	3,45	4,64	6,00

Il n'y a aucune proportionnalité entre les vitesses v et les déperditions totales même en trente secondes; cela

tient à ce que les vitesses de déperdition varient énormément au début; mais si l'on calcule la vitesse initiale de déperdition $\left(\frac{dp}{dt}\right)_{t=0} = p_{0,5} \cdot AB \times 0,434$, on trouve entre elle et la vitesse de torsion un rapport constant.

Exemple. — On arrête pour un γ_1 constant 0,105 Γ :

Vitesse en tours par minute.	Rapports $\frac{p_{0,5}}{v}$.	Formule représentant la déperdition.	Vitesse initiale de déperdition.	Rapport de la vitesse initiale à la vitesse de torsion.
0,882...	0,127	$p = 1,350 \log(9t + 1)$	0,590 Γ	0,150
0,504...	0,168	$1,838 \log(5t + 1)$	0,339 Γ	0,149
0,112...	0,295	$3,322 \log(2t + 1)$	0,091 Γ	0,134

Pour juger de la concordance, il faut se rappeler qu'on ne peut pas certifier $p_{0,5}$, et, par conséquent, $\left(\frac{dp}{dt}\right)_0$ à $\frac{1}{15}$ près. A mesure que la vitesse de rotation diminue, il y a de plus en plus proportionnalité entre les déperditions totales, $p_{0,5}$ par exemple, et les vitesses de torsion, parce que les vitesses de déperdition sont de moins en moins variables au début. La proportionnalité énoncée entre les vitesses initiales de déperdition et les vitesses de torsion, jointe à la loi du § XXVI, donne la règle plus générale suivante : « La vitesse initiale de déperdition est proportionnelle à la vitesse χ de déperdition pendant la torsion au moment de l'arrêt ».

Resterait à savoir si cette proportionnalité ne serait pas l'égalité. *A priori* rien ne le nécessite. Imaginons un vase chauffé par la flamme qui l'entoure; on éteint le feu, il y a proportionnalité entre les refroidissements avant et après l'extinction; il n'y a pas égalité, parce que le fait seul de l'extinction a modifié brusquement le coefficient d'émission de la surface.

Dans l'expérience précédente les valeurs de χ et de

$\left(\frac{dp}{dt}\right)_0$ étaient

$$\chi = 0,789 \Gamma, \quad \left(\frac{dp}{dt}\right)_0 = 0,590 \Gamma,$$

$$0,453 \Gamma, \quad 0,339 \Gamma,$$

$$0,100 \Gamma, \quad 0,091 \Gamma.$$

L'écart paraît grand, mais, si l'on juge l'incertitude qui règne sur $\left(\frac{dp}{dt}\right)_0$, on n'osera affirmer une conclusion ni dans un sens ni dans l'autre.

XXXI. Influence du recuit.

1° Pour la même vitesse de rotation, le même $\Gamma - \gamma$, $p_{0,5}$ diminue avec la température de recuit.

2° La loi de déperdition devient plus rapide quand la température de recuit augmente : la constante B croît.

Exemple. — Vitesse de 1^t en 536^s, soit 0^t,112 à la minute, $\gamma = \frac{\Gamma}{3}$.

	$p_{0,5}$	Rapports $\frac{P}{p_{0,5}}$ pour les temps			
		1 ^m .	5 ^m .	10 ^m .	20 ^m .
Fil non recuit.....	0,026	1,50	3,42	4,58	5,81
Recuit avec 2 ^a ,00 $\times$ 30 ^s ...	0,017	1,34	2,18	2,47	2,77
» 2 ^a ,50 $\times$ 30 ^s ...	»	1,33	2,20	2,51	2,88

Ces deux règles sont une conséquence l'une de l'autre, si on admet que la vitesse de déperdition au début est égale à $\chi = \nu(\Gamma - \gamma)$, et par conséquent constante.

3° L'état du fil varie le plus pour des recuits compris entre 1^a,80 et 2^a,00; au delà, les changements sont insignifiants. (Voir la dernière ligne du Tableau précédent.)

4° Au cours de ces expériences on a pu vérifier le § IV, c'est-à-dire la croissance de Γ . Le rapport du Γ du fil recuit au Γ du fil non recuit a été trouvé pour trois fils différents et recuits avec des courants de 2^a,00 à 2^a,50, égal à 1,031, 1,027, 1,032. La variation semble se pro-

duire aussi au voisinage de $1^{\text{a}}, 80$, qui correspond au rouge sombre.

XXXII. Les phénomènes précédents se passent tout le long des courbes φ ; ils correspondent généralement à une rétrogradation du couple (cf. § XXXIV) qui peut être une diminution ou un accroissement. En particulier, pour le couple nul le mouvement consécutif à l'arrêt est un accroissement de couple. C'est un phénomène absolument analogue à l'*Elastische Nachwirkung* de Weber, qui aurait la définition générale suivante : « Sur une courbe φ quelconque, pour maintenir le couple constant, il faut, pendant un certain temps après l'arrêt, compenser la rétrogradation du couple par un mouvement à vitesse variable dans le sens primitif. » Nous opérons à torsion constante et couple variable. Dans le phénomène de Weber, on opère à couple constant et torsion variable. Weber et la plupart de ceux qui ont étudié ce phénomène ont opéré dans le cas particulier du couple nul. Ils suspendaient un disque à un fil, le laissaient revenir à sa position d'équilibre après l'en avoir déplacé, et constataient qu'elle n'est pas définitive, même après plusieurs heures. Leurs expériences prêtent malheureusement à bien des critiques; généralement les parcours antérieurs ne sont pas définis.

XXXIII. Nous pouvons arbitrairement faire en sorte que la condition de déperdition normale ne soit pas réalisée; la loi de déperdition variera.

Parvenu en un certain couple C_1 , on laisse la déperdition s'effectuer pendant vingt minutes; puis on revient à ce couple C_1 , on laisse de nouveau la déperdition s'effectuer pendant vingt minutes, et ainsi de suite.

Voici le résultat de l'expérience, fil non recuit, vitesse 1 tour en 119 secondes.

Numéros de l'expérience.	Valeurs de $p_{0,5}$.	Rapports $\frac{p}{p_{0,5}}$ pour des temps			
		1 ^m .	5 ^m .	10 ^m .	20 ^m .
Première expérience..	0,091 Γ	1,43	2,65	3,30	3,96
Deuxième expérience..	0,062	1,34	2,39	3,02	3,76
Troisième expérience..	0,048	1,27	2,33	3,00	3,85
Quatrième expérience.	0,036	1,35	2,53	3,33	4,33
Cinquième expérience.	0,029	1,38	2,72	3,48	4,62
Déperdition normale...	»	1,455	2,685	3,260	3,842

La courbe de retour au couple C_1 , dont la tangente initiale est voisine de Γ , s'infléchit ensuite brusquement pour aboutir au couple C_1 , suivant une tangente dont le γ augmente avec le numéro de l'expérience.

XXXIV. Dans les paragraphes précédents, il y avait arrêt brusque. Supposons maintenant qu'on détorde pendant la déperdition avec la vitesse ν' de détorsion. L'expérience aurait quatre temps :

1° On arrête en un couple C_1 pour un $\frac{dC}{d\alpha} = \gamma_1$.

2° On laisse la déperdition s'effectuer à azimut constant pendant le temps T_1 ;

3° On détord de C_2 à C_3 avec la vitesse ν' ;

4° On observe la nouvelle déperdition à partir de C_3 .

Pourvu que C_3 ne soit pas trop différent de C_2 , la déperdition se fait à partir de C_3 dans le même sens qu'à partir de C_2 , dans le sens même de la torsion 3° ; si la différence $C_1 - C_3$ augmente, la déperdition 4° diminue, s'annule et devient inverse de la torsion 3°.

Supposons $T_1 = 0$, $C_1 = C_2$. Le passage en C_3 , sous l'influence de la déperdition à azimut constant ou par le fait d'une détorsion, correspond à des états absolument différents du fil ; dans le second cas, il y a moins de glissement interne que dans le premier ; les écrouissages sont différents. En particulier, la déperdition à azimut constant peut n'abaisser jamais le couple à la valeur C_3 ;

et la déperdition à azimuth constant à partir de C_3 peut avoir une valeur notable si, par détorsion, on amène le couple de C_1 à C_3 . Cette déperdition à partir de C_3 est d'autant moindre que le passage de C_1 à C_3 correspond à un plus grand glissement; elle diminue si l'on augmente T_1 et si l'on diminue la vitesse de détorsion entre les couples C_2 et C_3 .

On se rapproche ainsi de la déperdition à azimuth constant à partir de C_1 , pour laquelle la vitesse de déperdition est minima, en tous les couples inférieurs à C_1 .

XXXV. L'expérience suivante permet d'autres remarques :

Fil recuit $1^a, 79 \times 30^s$. Charge 125^{gr} ; un tour en 200^s .

Après un arrêt assez long, on tord de 180° , on attend 10^m et l'on marque la perte p_1 .

On détord de 180° , on attend 10^s , on marque la diminution de couple — $\Delta_1 C$.

On tord de nouveau de 180° , on détermine l'accroissement $\Delta_2 C$, et la perte p_2 en 10^m .

L'expérience est ainsi complète, pour continuer, on tord de 180° , etc. Toutes les expériences ci-dessous sont faites de même, sauf la neuvième et la onzième : pour celles-ci, on supprime l'arrêt après la première torsion, $p_1 = 0$; le reste comme plus haut.

N.	p_1 .	$\Delta_1 C$.	$p_1 + \Delta_1 C$.	$\Delta_2 C$.	p_2 .
5.....	54	471	525	465	12
6.....	64	481	545	472	14
7.....	72	482	554	478	19
8.....	84	490	574	481	20
9.....	0	513	513	471	54
10.....	93	498	591	489	21
11.....	0	520	520	476	56

Les glissements diminuent les vitesses de déperdition non seulement pour tous les couples inférieurs à celui

d'arrêt, mais aussi pour une torsion ultérieure et la déperdition consécutive.

Dans les expériences 9 et 11, le gain $\Delta_2 C$ diminue et p_2 augmente.

Le $\Delta_1 C$ passe brusquement de 490 à 513 (exp. 8 et 9) suivant que l'arrêt est de 10^m ou de quelques secondes : on conçoit maintenant le sens de la restriction apportée à la règle III; pour trouver la valeur correcte de Γ , il faut que l'influence de la déperdition soit nulle pendant la détorsion et pour cela qu'un état presque stable soit atteint avant la détorsion. Sinon on trouve une tangente initiale $\Gamma_1 > \Gamma$, et un mouvement consécutif à l'arrêt direct par rapport à la détorsion, c'est-à-dire négatif, comme la formule du § XXVI le pouvait faire prévoir.

XXXVI. *Application à ces phénomènes de la méthode des miroirs intermédiaires.* — Dans un fil élastiquement homogène, la rotation R d'un miroir intermédiaire est donnée par la formule

$$R = \frac{\gamma_1(l - \gamma_1)}{l} \left(\frac{1}{\gamma_1} \int_0^{\gamma_1} dg - \frac{1}{l - \gamma_1} \int_{\gamma_1}^l dg \right).$$

Puisqu'il y a des glissements consécutifs à l'arrêt, la rotation R n'est pas nulle nécessairement. Le dg a généralement la forme $dg = dy dt \Phi(y, t)$, où t est le temps compté à partir de l'arrêt; on aura donc une expression où entrera cette fonction Φ . On prévoit que les phénomènes seront infiniment compliqués.

Les questions traitées aux paragraphes précédents sont un cas particulier du cas actuel. En effet, la perte du couple au dynamomètre est égale à ΓR avec la condition $\gamma_1 = l$, puisqu'on peut considérer le dynamomètre comme un fil suffisamment court dans lequel il n'y aurait pas de glissements. Mais ce qui fait la simplicité relative de ce cas, c'est le fait que les fonctions Φ entrent toutes dans R

avec le même signe; bien que variables d'un point à l'autre du fil, elles le sont peu, et, en somme, le fil peut être considéré, même au point de vue de la cohérence, comme à peu près homogène.

Ici, au contraire, les fonctions de déperdition interviennent par leurs différences et l'appareil est infiniment plus sensible. Dans l'expérience dynamométrique, une cession de 1 tour de fil correspond à une rotation au maximum de 3° pour le miroir du dynamomètre; dans l'expérience actuelle, le miroir étant par exemple au milieu du fil, une cession de 1 tour du fil qui est au-dessous ou au-dessus du miroir, correspond à une rotation de 180° . Les mouvements consécutifs du miroir intermédiaire seront donc très faciles à observer, bien qu'ils ne correspondent ici qu'à la différence des glissements moyens au-dessus et au-dessous du miroir; ils seront le plus souvent infiniment compliqués, exactement pour la même raison : leur interprétation est très délicate.

XXXVII. Il y a cependant des cas où l'on prévoit aisément les phénomènes.

Si le fil est parfaitement recuit, les mouvements consécutifs du miroir intermédiaire sont nuls; car, le fil étant homogène, les glissements moyens au-dessus et au-dessous sont égaux.

Au début de la détorsion, près du point anguleux, quel que soit le fil, les mouvements consécutifs sont nuls, car alors les glissements sont nuls. Ils se reproduisent avant qu'on atteigne le couple nul. Généralement, si pendant la torsion ils sont directs par rapport à cette torsion, ils le seront pour la détorsion : de même s'ils sont rétrogrades.

Si la partie du fil qui est au-dessus du miroir est beaucoup plus molle que l'autre, les glissements se produisent au-dessus; le miroir, pendant la torsion, reste en arrière sur la position qu'il devait occuper avec un fil

homogène au point de vue des liaisons; après l'arrêt, il rétrograde.

Si la partie du fil au-dessous est beaucoup plus molle, le miroir est en avance pendant la torsion et le mouvement consécutif direct.

On peut obtenir des mouvements d'abord rétrogrades, ensuite directs ou réciproquement, qu'il est facile de prévoir d'après les règles des paragraphes précédents. En somme, malgré la grandeur des phénomènes (les rotations peuvent atteindre 10 ou 20°), il est à peu près impossible de tirer directement parti de ces expériences.

Pourtant, on peut baser sur elles une méthode très précise et souvent d'une grande utilité. Dans tous les cas où l'on veut reconnaître l'influence d'une action sur un fil (magnétisme, recuit plus ou moins grand, etc.), il est avantageux d'employer comme dynamomètre un fil aussi identique que possible à celui dont on cherche les modifications. (Par exemple, on colle sur un fil de fer, en son milieu, un miroir; on aimante la partie inférieure, etc.)

CAS DE LA VITESSE DE TORSION VARIABLE.

XXXVIII. Nous avons mis le gain du couple sous la forme $dC = \Gamma d\alpha - \chi dt$. L'existence de ce terme χdt est démontrée par les mouvements consécutifs directs et rétrogrades pendant les arrêts et au début des détorsions. Le temps crée donc à lui seul des phénomènes et doit être considéré physiquement et mathématiquement comme variable indépendante. Il s'agit d'approfondir le rôle de cette déperdition pendant la torsion, le long de la courbe φ .

On peut écrire

$$dC = \Gamma d\alpha - \chi dt = \left(\Gamma - \frac{\chi}{v} \right) d\alpha.$$

Pour déterminer l'influence de cette vitesse, fixons un

parcours G décrit avec une vitesse v , et des arrêts T dont la durée soit un nombre m donné de fois la durée d'un tour, $T = \frac{m}{v}$. Le parcours fixé, changeons la vitesse en maintenant m constant, et déterminons les nouvelles amplitudes. Tout revient à changer l'unité de temps et, d'après les règles connues, le choix fait pour T a l'avantage que, pour de petites valeurs de m , la déperdition après l'arrêt est sensiblement indépendante de la vitesse.

Exemple. — Fil recuit 1^a, 80×30^s ; limites égales et de signe contraire; les parcours en chiffres gras sont faits à la vitesse de 1 tour en 506^s , les autres à la vitesse de 1 tour en 111^s.

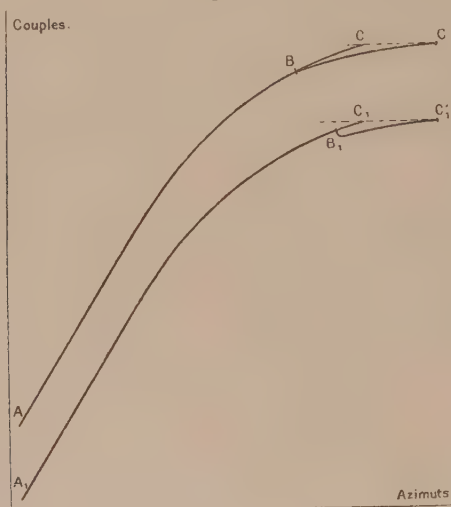
	Amplitudes.		Amplitudes.
$G = 2,98.$	4,300	$G = 2,55.$	3,477
»	*4,806	»	3,222
»	4,242	»	3,364
»	4,833	»	3,208
»	4,261	»	3,339
»	*5,603	»	3,206
»	4,353	»	3,333
»	5,011	»	3,208
»	4,308	»	3,533
»	4,525	»	3,253
»	4,264	»	3,466
»	4,570	»	3,228
		»	3,303
		»	3,200
		»	3,294
		»	3,200

L'amplitude croît avec la durée du parcours; l'effet du changement de vitesse croît avec la grandeur du parcours.

XXXIX. Pour savoir sur quelles parties des courbes φ agit principalement le changement de vitesse, comparons les deux courbes dont les amplitudes sont précédées sur le Tableau du signe *. Elles coïncident exactement, jusqu'au couple 2,89 compté à partir de la limite supérieure, soit

sur les $\frac{34}{35}$ du parcours total. C'est seulement à la fin que la courbe ABC' (fig. 14), correspondant à la petite vitesse, se détache de la courbe ABC correspondant à la grande vitesse, tangentielllement en dessous (la figure exagère la différence). L'allongement si notable de l'amplitude du parcours correspond au gain de ces 0,03 Γ . Au point de vue

Fig. 14.



amplitude, diminuer la vitesse revient à augmenter la grandeur G du parcours.

Supposons qu'on fixe le parcours à une vitesse v , puis qu'en un point B_1 d'une courbe $A_1B_1C_1$, on diminue brusquement la vitesse; la nouvelle courbe $A_1B_1C'_1$ se détache brusquement de la première par-dessous; mais elle continue ensuite parallèlement. Le parcours est notablement allongé comme précédemment, mais l'allongement ne provient que des portions tout à fait terminales de la courbe.

Dans la seconde expérience on rattrape brusquement, suivant $B_1C'_1$, une courbe analogue (non identique) à la

courbe précédemment décrite ABC' . Donc on ne peut mettre en évidence le ressaut que si le point B_1 est voisin de l'extrémité C_1 de la courbe.

Ainsi, avec le parcours $G = 2,98$, en effectuant à la vitesse de 1 tour en 151^s les $\frac{290}{298}$ du parcours et passant brusquement à la vitesse de 1 tour en 436^s , on constatait un abaissement de la courbe de $0,005 \Gamma$ à peine : la valeur de $\frac{dC}{dx} = \gamma$ sur la courbe $A_1 B_1 C_1$ au point B_1 était $0,296 \Gamma$.

XL. On voit à quel point la fonction χ s'écarte d'être déterminée par rapport au couple, même pour un parcours fixé. Un abaissement insignifiant du couple, effectué à torsion constante par un glissement intérieur, change sa valeur du tout au tout. Ce résultat concorde avec ce que nous savons de la variation de la fonction de déperdition après l'arrêt en fonction du glissement.

L'état du fil, en chaque point d'un parcours, serait complètement défini par la connaissance numérique de deux quantités; tout serait connu pour des variations infiniment petites des variables indépendantes au voisinage de ce point.

Posons

$$d\chi = -M dg + N dC;$$

avec la relation $dC = \Gamma dx - \chi dt$, cette équation définirait l'état du fil; il suffirait de connaître les valeurs numériques de M et N .

Soit d'abord $dx > 0$; on a

$$dC > 0, \quad d\chi > 0, \quad N dC > M dg.$$

On arrête brusquement

$$dx = 0, \quad dC < 0, \quad dg > 0, \quad d\chi = \left(\frac{M}{\Gamma} + N \right) dC;$$

$d\chi$ est devenu brusquement négatif, et comme les deux

termes qui donnent sa variation agissent dans le même sens, χ décroît très rapidement.

Pendant cette décroissance, M et N varient eux-mêmes. L'expression de la déperdition donnée au § XXVI, à supposer qu'elle soit théorique, est le résultat de l'intégration des équations ci-dessus, à l'aide des relations, d'ailleurs inconnues, qui définissent M et N , et qui sont très probablement deux autres équations différentielles.

Ces considérations montrent le peu d'intérêt que présente la connaissance, sous forme finie, des équations des courbes d'un parcours, même bien déterminé, même à supposer qu'on ait par hasard rencontré la forme théorique. Car si, à l'aide de M et N , on peut trouver l'équation d'une courbe de définition quelconque, la réciproque n'est pas vraie.

XLI. Supposons que la vitesse de torsion soit toujours de même signe et de la forme $a + b \sin \omega t$. On fait entraîner la corde $c_1 c_2 c_3$ (*fig. 2*) par une poulie excentrique de rayon a dont le centre est à une distance b de l'axe de rotation (la condition $b < a$ est satisfaite), et qui tourne d'un mouvement uniforme. La corde de retour passe sur un tenseur. La corde tirante étant horizontale, les maxima et minima de vitesse se produisent quand la portion de circonférence de l'excentrique la plus éloignée de l'axe de rotation se trouve dans la verticale de cet axe.

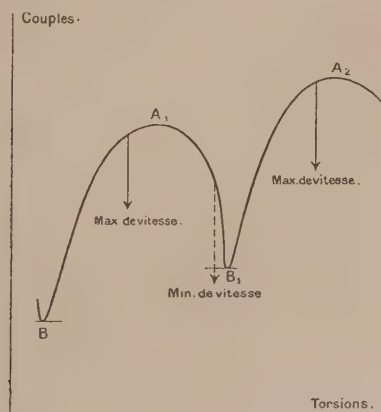
Soit ϵ la période du phénomène évaluée en azimuts; les maxima de vitesse se produisent, par exemple, pour les azimuts $0, \epsilon, 2\epsilon, \dots$. Quand on s'éloigne du point anguleux, le couple croît d'abord constamment; puis, la courbe $C = \varphi(\alpha)$ présente une tangente d'inflexion horizontale; enfin, des maxima et des minima relatifs.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'_1, \alpha'_2, \dots$ les azimuts correspondant aux maxima (α_1) et aux minima (α_2) du couple. L'écart $\alpha'_1 \alpha'_2$ d'un maximum relatif au minimum suivant, d'abord

nul, croît peu à peu pour devenir égal à $\frac{\varepsilon}{2}$. Les minima et les maxima du couple se produisent après les passages aux minima et maxima de la vitesse. L'écart azimutal entre un minimum de vitesse et le minimum du couple suivant varie peu ; la variation de $\alpha_1^n \alpha_2^n$ dépend donc presque uniquement du retard des maxima du couple par rapport aux maxima et minima de la vitesse.

Si la torsion se prolonge suffisamment, la valeur des maxima et des minima du couple devient sensiblement constante, et à la variation de vitesse correspond une oscillation du couple entre limites invariables. La *fig. 15* représente le phénomène.

Fig. 15.



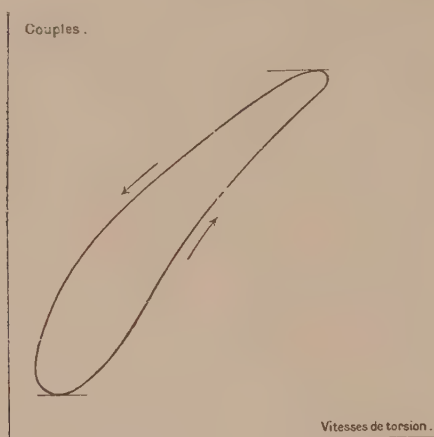
La différence évaluée en couples entre un maximum et le minimum consécutif, d'abord nulle, tend vers une limite qu'elle atteint quand les valeurs des maxima ou minima deviennent constantes.

XLII. On a cherché à obtenir directement les couples en fonction des vitesses dans le cas limite où l'oscillation des couples se fait entre valeurs constantes. On a fixé, sur

l'axe de rotation de l'excentrique, un disque de cuivre sur lequel sont soudées des aiguilles à des distances angulaires telles que leur passage dans un azimut donné (où elles rompent un contact électrique) correspond à des valeurs de la vitesse variant en progression arithmétique.

La courbe obtenue (*fig. 16*) est fermée.

Fig. 16.



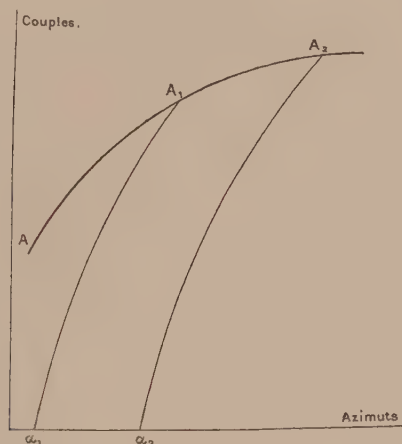
On peut admettre qu'au bout d'un certain nombre de tels parcours, la fonction χ est exprimable en fonction de C , en ce sens qu'elle reprend la même valeur au passage par le même couple dans le même sens de variation des couples : elle a donc généralement deux valeurs pour chaque couple, une d'aller et l'autre de retour. Il est probable, vu la forme de courbe obtenue (*fig. 16*), que cette fonction, même dans ce cas si particulier, est très complexe.

Positions d'équilibre dynamiques et statiques.

XLIII. D'après l'énoncé généralisé de la règle III, si l'on suppose les liaisons rigides, la courbe de torsion est

la droite $C = \Gamma\theta$ ou plus généralement la courbe $C = \Gamma(\theta)$, si θ désigne dans ces conditions l'angle de torsion. Si les liaisons ne sont pas rigides, la courbe de torsion réelle $C = \varphi(\alpha)$ a une forme telle que AA_1A_2 (fig. 17). Nous avons appelé *glissement* ou *déformation permanente* cor-

Fig. 17.



respondant au parcours A_1A_2 , la distance $\alpha_1\alpha_2$ des points de l'axe des azimuts où l'on reviendrait à partir des points A_1 et A_2 , suivant la courbe parfaitement déterminée et caractéristique du fil $C = \Gamma(\theta)$ (dans nos expériences, une droite de coefficient angulaire Γ). Ce sont là des définitions incontestables.

Passons à la définition des positions d'équilibre.

Le fil est dans un état d'équilibre, quand il exerce un couple nul sur un corps qui y est suspendu. Donc le corps est dans une position d'équilibre statique du fil, s'il reste au repos une fois qu'on l'y a mis ; il passe par une position d'équilibre dynamique si la vitesse y est maxima, les forces extérieures (résistance de l'air, etc.) étant négligeables.

Si le corps, qu'on suppose seulement pouvoir tourner

B.

4.

autour de l'axe du fil vertical, est dans une position représentée par le point A_1 du plan, qui n'est pas d'équilibre, il est illusoire de parler d'une position d'équilibre correspondant à A_1 , car il en existe une infinité. Pour chaque manière d'arriver au point A_1 du plan, et à partir du point A_1 , pour chaque parcours choisi et chaque manière de l'effectuer, on parvient à une position différente d'équilibre statique, après avoir passé par une série de positions différentes d'équilibre dynamique, tant que la vitesse ne s'est pas encore annulée.

On peut évidemment considérer comme position idéale d'équilibre le point α_1 obtenu en supposant le fil détordu suivant la loi $C = \Gamma(\theta)$; mais généralement aucune position réelle d'équilibre ne coïncide avec celle-là.

Il est illusoire de parler de l'énergie potentielle contenue dans un fil pour un point donné du plan, sans spécifier suivant quelle méthode on entend l'utiliser.

Les paragraphes suivants sont destinés à montrer combien, à partir d'un point donné du plan, il est facile de faire varier la position d'équilibre statique définitive.

XLIV. Imaginons que le fil supporte un disque de verre dont le pourtour est divisé en degrés. On le tord par son extrémité supérieure, suivant une loi à peu près uniformément accélérée, d'un angle A_0 (généralement 720°), en un temps donné (généralement 4^s). On rend le disque libre d'obéir au couple de torsion, un temps τ après la fin de la torsion : il tend par une série d'oscillations à revenir à sa position d'équilibre. Supposons qu'il porte fixée sous lui, dans un plan vertical, une plaque de métal légère sous laquelle on peut élever un vase plein d'huile par le moyen d'une crémaillère. On peut ainsi introduire un frottement liquide, donner aux oscillations un décrement logarithmique variable, et modifier la loi d'amortissement.

Connaissant l'azimut initial I du disque, avant le lancement, et l'azimut final F , on détermine le changement

de distance angulaire Δ résultant de l'opération pour deux plans passant par le fil et invariablement liés à ses extrémités : c'est le glissement total. Plaçons-nous au-dessus du fil, tordons positivement de 720° ; si le disque tourne positivement de 720° , $\Delta = 0$; s'il tourne d'un angle moindre, $\Delta > 0$; d'un angle plus grand, $\Delta < 0$. La position finale F n'est d'équilibre que si on la détermine un temps suffisant après l'opération.

La plaque pouvait s'enfoncer de 8^{cm} dans l'huile; en soulevant le vase de 6^{cm} le mouvement devenait apériodique.

Le frottement de l'air était négligeable. Pour arrêter le disque pendant le temps τ , on avait collé dessus une petite tige, contre laquelle venait buter l'extrémité de l'armature d'un électro-aimant. On lisait la graduation du disque à distance à l'aide d'une lunette très grossissante.

XLV. *Oscillation des positions d'équilibre.* — On arrête le disque un temps constant $\tau = 10^s$; on le laisse ensuite osciller avec un amortissement négligeable pendant 0, 1, 2, . . . , p demi-oscillations. Au commencement de la $(p + 1)^n$, ce qui correspond à un point $B_{\frac{p}{2}}$ ou $C_{\frac{p}{2}}$ (fig. 18), on produit un amortissement considérable en soulevant le vase plein d'huile; le disque tend apériodiquement vers une position d'équilibre statique $E_{\frac{p}{2}}$ qui correspond à p demi-oscillations. On recommence la même expérience en donnant à p une série de valeurs.

Exemple. — Fil recuit $1^s, 90 \times 30^s$. Le fil change d'état à mesure qu'augmente le nombre des opérations; aussi, à partir de la première de la série dont on donne les résultats (pour laquelle l'amortissement est introduit après 10 demi-oscillations), jusqu'à la dernière (pour laquelle l'amortissement est introduit avant le lancement même), les azimuts des extrémités des oscillations, comptés à partir de la position initiale du disque b (fig. 18), changent-ils. Pour faciliter les comparaisons, on a mul-

aire $BbE = \text{aire } CcE$. Le point C est beaucoup reporté vers la gauche. Non seulement le nouveau $\Delta = AE'$ est plus petit que l'ancien $\Delta = AE$, mais encore on peut s'arranger de manière que le point E' passe à gauche de A et que $\Delta < 0$. Le résultat de l'expérience est paradoxal; on trouve l'extrémité supérieure de A^0 , l'extrémité inférieure tourne de plus de A^0 .

Si alors on décrit de nouveau un parcours ABE , la courbe AB est le prolongement de la portion CE' de l'expérience précédente; elle est très infléchie et brusquement le Δ redevient positif et très grand.

Inversement, on décrit plusieurs fois le parcours $ABECE'$; on obtient une série de Δ décroissants; on décrit alors un parcours ABE , le Δ est immédiatement beaucoup plus grand.

Exemple. — Fil recuit $1^a, 89 \times 10^8 \tau = 10^8$, lecture 10^m après le lancement.

Parcours ABE .	Parcours $ABECE'$.
$\Delta = 351, 284, 249, 226, 207$	$\Delta = - 5^0$
198, 182, 174	— 39
190, 162, 156	— 67
183, 145, 143	— 85
181, 133, 133	

Fil recuit $1^a, 90 \times 30^8 \tau = 10^8$, lecture 10^m après le lancement.

Parcours $ABECE'$.	Parcours ABE .
$\Delta = 392, 315, 263, 231, 209$	$\Delta = 310$
180, 162, 156	280
131, 128, 123	261
110, 107, 105	250
95, 93, 92	

XLVII. *Lancements dans des sens opposés.* — On décrit plusieurs fois un parcours ABE, on obtient des Δ décroissants. Puis on décrit le même parcours en sens opposé. La nouvelle courbe AB est le prolongement de la courbe BE de la précédente opération; elle est donc très infléchie; le Δ augmente énormément. On recommence ensuite des parcours ABE dans le sens primitif; le Δ du premier de ces parcours est grand; ceux des parcours suivants sont beaucoup plus petits.

Exemple. — Fil recuit $1^a, 90 \times 30^s$.

sens —	$\Delta = 447,$	395,	364,	339,	sens +	$\Delta = 348,$
»	316,	296,	286,		»	329,
»	288,	268,	264,		»	324,
»	274,	252,	249,		»	321,
»	266,	244,	239,			

XLVIII. Voici une expérience plus complexe. On produit des amortissements variables, le lancement restant le même et de même sens. Si d'une expérience à l'autre l'amortissement décroît, Δ diminue; s'il croît, Δ augmente. On peut obtenir des $\Delta < 0$; il faut, après de forts amortissements, mettre un amortissement nul.

Exemple. — Fil recuit $1^a, 90 \times 30^s, \tau = 10^s$. Lecture faite après 10^m . Pour comparer les expériences, on représente les Δ par des formules d'interpolation où le numéro d'ordre de l'opération est pris pour variable; chaque courbe correspond à un certain amortissement.

L'amortissement est nul si la hauteur h d'huile $= 0$; il devient apériodique si $h = 60^{mm}$. Dans l'expérience en question il était produit par $5,25$ et 45^{mm} d'huile. Les Δ sont affectés des exposants d et c ; comme les expériences sont croisées de manière que successivement les amor-

tissements soient dus à $\overbrace{5, 25, 45}^c \quad \overbrace{45, 25, 5}^d \dots$ millimètres d'huiles, le signe c indique que l'amortissement croît, le signe d qu'il décroît d'une expérience à la suivante.

On a obtenu :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_5^d = 160,7 - 3,7n + 0,046n^2, \\ \Delta_5^c = 164,3 - 3,7n + 0,046n^2, \end{array} \right. & \Delta_5^c - \Delta_5^d = 3^{\circ},6, \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{25}^d = 223,4 - 3,2n + 0,05n^2, \\ \Delta_{25}^c = 227,5 - 3,2n + 0,05n^2 \end{array} \right. & \Delta_{25}^c - \Delta_{25}^d = 4^{\circ},1, \\ \Delta_{45} &= 284,9 - 3,5n + 0,08n^2. \end{aligned}$$

Les formules montrent, en plus du résultat annoncé, que, pour un même amortissement, le Δ dépend de l'amortissement dans l'opération précédente. L'écart entre les nombres expérimentaux et les nombres calculés par ces formules est inférieur à $0^{\circ},5$.

XLIX. Effet de la variation du temps τ . — Le Δ croît avec le temps τ : ce n'était pas difficile à prévoir.

Exemple. — Fil recuit $1^a, 98 \times 30^s$: amortissement grand mais mouvement encore périodique; temps $\tau = 0,30$, ou 120 secondes.

Les résultats sont représentés par les formules suivantes, où n est le numéro d'ordre de l'expérience.

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= 197,6 - 2,5n, \\ \Delta_{30} &= 211,6 - 2,5n, \\ \Delta_{120} &= 215,6 - 2,5n. \end{aligned}$$

Le quotient $\frac{d\Delta}{d\tau}$, considérable pour τ petit, décroît ensuite rapidement lorsque τ croît. Ici le glissement que nous avons si longuement étudié comme déperdition de couple, se montre sous sa forme véritable.

CONCLUSIONS.

Au moins pour le platine, la seule manière de construire une théorie de l'élasticité, applicable aux déformations petites, est d'introduire des liaisons non rigides entre les particules intégrantes (supposées parfaitement élastiques et dont les déformations sont proportionnelles au couple) et la variable indépendante temps.

Nous étudierons dans un prochain Mémoire les parcours effectués suivant une loi sinusoïdale.

Vu et approuvé :

Paris, le 25 novembre 1896.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 25 novembre 1896.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.



SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Électrolyse des dissolutions salines. — Théorie et applications à l'analyse.

Vu et approuvé :

Paris, le 25 novembre 1896.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 25 novembre 1896.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

24119

Quai des Grands-Augustins, 55.
